

ÜBER DIE SYMMETRIENERGIE FASTMAGISCHER ATOMKERNE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Gießen

vorgelegt von
Gerhard Sauer
aus
Schwarzenbach

Gießen
1970

ÜBER DIE SYMMETRIEENERGIE FASTMAGISCHER ATOMKERNE

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Gießen

vorgelegt von
Gerhard Sauer
aus
Schwarzenbach

Gießen
1970



Dekan

Prof. Dr. G. Eder

I. Berichterstatter:

Prof. Dr. G. Eder

II. Berichterstatter:

Prof. Dr. W. Ludwig

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 7. 1970

D 26

Inhalt

1.	EINLEITUNG	1
2.	PROBLEMSTELLUNG	2
2.1.	Symmetrieenergie	2
2.2.	Schaleneffekte in der Symmetrieenergie	4
3.	ZUR ALLGEMEINEN THEORIE VON FERMI-SYSTEMEN	7
3.1.	GREEN-Funktionen	7
3.2.	Selbstenergie	8
3.3.	Quasiteilchen	9
3.4.	DYSON-Gleichung	11
3.5.	Streuamplitude Γ	13
3.6.	BETHE-SALPETER-Gleichung	14
3.7.	Γ für kleine Impulsübertragung	15
3.8.	Renormierung der BETHE-SALPETER-Gleichung	15
3.9.	F im endlichen System	17
4.	ÄNDERUNGEN IN DER GRUNDZUSTANDSENERGIE	18
4.1.	Grundzustandsenergie	18
4.2.	Chemisches Potential	20
4.3.	LANDAU-Theorie	20
4.4.	Änderung der Quasiteilchenenergie	23
4.5.	Änderung der Selbstenergie	24
4.6.	Homogenes System	28
4.7.	Physikalische Interpretation	30
5.	ANWENDUNG DER THEORIE AUF DIE BESTIMMUNG DER SYMMETRIEENERGIE	32
5.1.	Änderung im chemischen Potential	32
5.2.	Integralgleichung zur Bestimmung der Symmetrieenergie	34
5.3.	Symmetrie des effektiven Feldes	35
5.4.	Lösung der Gleichungen	38
5.4.1.	Einteilchenbasis	38
5.4.2.	Quasiteilchenenergien	39
5.4.3.	Besetzungszahlen	39
5.4.4.	Entkopplung	40

5.4.5. Beschränkung auf einen endlich dimensional Teilraum	40
5.4.6. Parameter der Wechselwirkung	43
5.4.7. Numerische Behandlung	44
5.5. LANDAU-Beitrag	44
5.6. Einfluß der Teilchen-LochPaare	47
5.7. Diskussion der numerischen Ergebnisse	48
6. Zusammenfassung	53

1. Einleitung

Grobe Tendenzen im Verhalten der Bindungsenergie von Atomkernen lassen sich in einfachen, semiempirischen Massenformeln wie der von WEIZSÄCKER erfassen. Andererseits können auf diese Weise wichtige Eigenschaften der Kerne, wie etwa die Schalenstruktur, nicht berücksichtigt werden. In der Tat läßt sich eine WEIZSÄCKER-Formel sowohl mit Hilfe des Tröpfchenmodells wie mit dem Modell unabhängiger Nukleonen begründen. Genaueren Aufschluß über den Einfluß der Schalenstruktur auf die Bindungsenergie gewinnt man, wenn man an Stelle der Konstanten in der WEIZSÄCKER-Formel Funktionen der Massenzahl verwendet¹⁾.

Ein besonders interessantes Verhalten zeigt sich dann beim isospinabhängigen Anteil der Bindungsenergie in der Weise, daß der Parameter der Symmetrieenergie in der Umgebung von magischen Atomkernen um etwa 10 Prozent seines Wertes springt. In der zitierten Arbeit¹⁾ hat G. EDER diese charakteristischen Sprünge bereits als Schaleneffekte in der effektiven Wechselwirkung der Nukleonen gedeutet. Wir wollen deshalb den Einfluß der effektiven Wechselwirkung auf die Symmetrieenergie der Atomkerne genauer untersuchen. Für diese Aufgabe erscheint die von A.B. MIGDAL²⁾ entwickelte Quasiteilchenmethode recht geeignet, weil dieses Modell einmal eine gute Näherung für fastmagische Kerne sein sollte, sich zum anderen die Beschreibung von Energiedifferenzen zwischen Nukleonenkonfigurationen, die sich nur an der FERMI-Oberfläche unterscheiden, besonders einfach gestaltet.

¹⁾ G. EDER, Acta Physica Austriaca 28, 85 (1968) .

²⁾ A.B. MIGDAL, Theory of Finite Fermi Systems and Applications to Atomic Nuclei, N.Y., 1967

2. PROBLEMSTELLUNG

2.1. Symmetrieenergie

Die Grundzustände von Atomkernen mit gerader Protonenzahl Z und gerader Neutronenzahl N sind gut miteinander vergleichbar, weil sie alle den Drehimpuls $J=0$ und positive Parität besitzen. Um das Verhalten der Grundzustandsenergie in Abhängigkeit von Z und N zu studieren, ist es deswegen vorteilhaft, sich zunächst auf gg-Kerne zu beziehen¹⁾.

Betrachten wir die Bindungsenergie für Atomkerne mit konstanter Massenzahl $A=N+Z$, so erwarten wir bei der COULOMB-Energie der Protonen eine Abhängigkeit von Z in der Form

$$E_{\text{Coulomb}} = c Z (Z - 1) ,$$

denn jedes der Z Protonen zeigt eine elektrostatische Wechselwirkung mit den restlichen $(Z-1)$ Protonen (die elektrostatische Selbstenergie ist bereits in der Nukleonenmasse eingeschlossen). Mit Hilfe des Neutronenüberschusses $t=N-Z$ können wir die COULOMB-Energie in der Form

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{c}{4} (A-t) (A-t-2)$$

schreiben.

Stabile Atomkerne mit endlicher Ladung kann es nur geben, wenn die Bindungsenergie einen zweiten isospinabhängigen Anteil aufweist, der die Kerne mit endlichem Z energetisch begünstigt und die COULOMB-Energie gerade bei den β -stabilen Atomkernen kompensiert. Da die Kernkräfte ladungsunabhängig sind (d.h. invariant gegen Drehungen im Isospinraum um den Winkel π), kann dieser Anteil nur vom Betrag des Neutronenüberschusses abhängen.

¹⁾ G. EDER, a.a.O.

Die z-Komponente des Isospins T_3 ist dabei durch

$$T_3 = -\frac{1}{2} t$$

gegeben. Darüber hinaus sind die Kernkräfte invariant gegenüber beliebigen Drehungen im Isospinraum ; der von diesen Kräften herrührende Anteil der Bindungsenergie darf deshalb nur vom Quadrat des Isospins $\vec{T}^2 = T(T+1)$ abhängen, wobei für die Isospinquantenzahlen T und T_3 die Ungleichung

$$|T_3| \leq T$$

gelten muß.

Betrachten wir den Atomkern als ein entartetes FERMI-Gas, so entsteht der Grundzustand durch sukzessives Auffüllen der Einteilchenzustände. Ein Proton und ein Neutron im gleichen Zustand besitzen zusammen den Isospin $T=0$. Von den Zuständen mit festem Wert von T_3 wird dann derjenige Zustand mit der kleinsten Isospinquantenzahl

$$T = T_3$$

der Grundzustand sein.

Wenn wir annehmen, daß wir uns auf eine lineare Abhängigkeit von $\vec{T}^2$ beschränken können, erwarten wir demnach einen Kernkraftanteil der Bindungsenergie von der Form

$$c' |T_3| (|T_3|+1) = \frac{c'}{4} |t| (|t|+2) ,$$

den wir als Symmetrieenergie bezeichnen wollen.

Diese können wir wiederum in einen Beitrag der kinetischen Energie und einen Beitrag der potentiellen Energie aufspalten. Der kinetische Anteil läßt sich durch das Abzählverfahren für ebene Wellen¹⁾ abschätzen . Für die gesamte kinetische Energie ergibt sich dann

$$T_{\text{kin.}} = \frac{3}{5} \epsilon_F \left(A - \frac{5}{9} \frac{t^2}{A} \right)$$

(ϵ_F : FERMI-Energie für den symmetrischen Atomkern mit $N=Z$).

¹⁾ G. EDER, Kernkräfte, S. 189, Karlsruhe 1965.

Den Symmetrieanteil der potentiellen Energie können wir abschätzen, wenn wir annehmen, eine Isospinabhängigkeit liege ausschließlich in der Tiefe des Einteilchenpotentials vor. Setzen wir hierfür

$$V^{\text{Proton}} = 2 a_1 \left(1 + a_2 \frac{t}{A} \right)$$

$$V^{\text{Neutron}} = 2 a_1 \left(1 - a_2 \frac{t}{A} \right)$$

an, dann resultiert daraus ein Betrag für die gesamte potentielle Energie

$$\sim a_1 \left(A + a_2 \frac{t^2}{A} \right).$$

Für die Symmetrieenergie wollen wir deswegen endgültig den Ansatz

$$B_{\text{symm.}} = - \frac{a_1}{A} |t| (|t| + 2)$$

machen. Tatsächlich stellt es sich heraus, daß der Symmetrieparameter a_1 nicht konstant ist für alle Isobarengruppen, sondern mit der Massenzahl A zunimmt.

2.2. Schaleneffekte in der Symmetrieenergie.

Der isospinabhängige Anteil der Bindungsenergie läßt sich aus dem Verhalten der experimentellen Bindungsenergie innerhalb einer Isobarengruppe bestimmen. Setzen wir die COULOMB-Energie als bekannt voraus, dann können wir den Symmetrieparameter a_1 durch Anpassung ermitteln. Mit einem COULOMB-Beitrag

$$B_{\text{Coulomb}} = - \frac{a_2(A)}{4 A^{1/3}} (A - t) (A - t - 2)$$

$$a_2(A) = (0.803 - 0.546 A^{-1/3}) \text{ MeV}$$

ergibt dann die Analyse der experimentellen Werte das folgende Bild (Abb.1)¹⁾.

1) G. EDER, Acta Physica Austriaca, a.a.O., S.90.

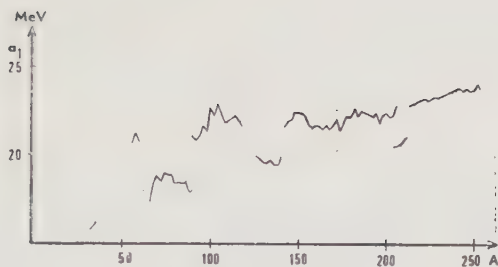


Abb.1. Symmetrieparameter $a_1(A)$.

Auffällig ist dabei, daß die Werte von a_1 , von kleineren Schwankungen abgesehen, auf zwei deutlich voneinander getrennten Kurven liegen. Die Zuordnung zu den beiden Kurven zeigt, daß es sich um einen Schaleneffekt handelt. Der größere Wert des Symmetrieparameters wird angenommen, wenn sich die letzten Neutronen und Protonen auf verschiedenen Schalen befinden, der kleinere Wert dagegen, wenn sie die gleiche Schale besetzen. Wird in der Neutronenzahl N bzw. in der Protonenzahl Z eine magische Zahl überschritten, so springt der Symmetrieparameter um etwa zwei MeV.

Wir greifen die magische Zahl 50 heraus und untersuchen die beiden Fälle, bei welchen einmal die Neutronenzahl N , das andere Mal die Protonenzahl Z jene magische Zahl überschreiten. Der erste Fall tritt in der Umgebung der Massenzahl $A=90$, der zweite in der Nähe von $A=116$ auf. Damit erfassen wir sowohl den Sprung des Symmetrieparameters von der unteren Kurve in Abb.1 zur oberen als auch die umgekehrte Situation.

Die Aufgabe besteht nun darin, das Verhalten der Symmetrienergie an Hand einiger gg-Kerne im interessierenden Bereich zu untersuchen. Dabei wird es in erster Linie nicht darum gehen, den absoluten Wert des Symmetrieparameters genau zu reproduzieren, dieser ist ohnehin noch von den Annahmen über die COULOMB-Energie abhängig, wir werden unsere Aufmerksamkeit vielmehr der Differenz zwischen den beiden Kurven in Abb.1 widmen.

Zunächst bemerken wir noch, daß dieser Unterschied in erster Linie bei der potentiellen Energie zu suchen ist. Das Überspringen einer Energielücke in der kinetischen Energie führt nicht zu einem Sprung in der Symmetrienergie, denn alle Nukleonen, die Zustände überhalb der Lücke besetzen, erhalten diese zusätzliche kinetische Energie, was demnach zu Schaleneffekten im Volumenanteil der Bindungsenergie führen wird.

3. ZUR ALLGEMEINEN THEORIE VON FERMI-SYSTEMEN.¹⁾

3.1. GREEN-Funktionen.

Die Eigenschaften eines Systems wechselwirkender FERMI-Teilchen studieren wir mit Hilfe von GREEN-Funktionen. Die N-Teilchen-GREEN-Funktion K_N wird als Erwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren definiert.

$$K_N(1\dots N; 1'\dots N') = (-1)^N \langle O | T \psi(1) \psi(N) \psi^\dagger(N') \dots \psi^\dagger(1') | O \rangle$$

Dabei repräsentiert $|O\rangle$ den Grundzustand des betrachteten Systems, $\psi^\dagger(i)$ bezeichnet einen Operator im HEISENBERG-Bild, der ein Teilchen am Ort $\vec{r}_i$ zur Zeit t_i erzeugt, und $\psi(i)$ den entsprechenden Vernichtungsoperator.

Speziell werden wir die Einteilchen-GREEN-Funktion $G = K_1$ und die Zweiteilchen-GREEN-Funktion $K = K_2$ betrachten.

Aus der Bewegungsgleichung für die Feldoperatoren können wir die Bewegungsgleichungen für die GREEN-Funktionen K_N ableiten. Es entsteht so eine Hierarchie von miteinander gekoppelten Gleichungen der Form

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} - H_1^0 \right) K_N(1\dots N; 1'\dots N') = \sum_{\text{symm.}} K_{N-1}(1\dots \cancel{1}\dots N; 1'\dots N') (-i \delta(11')) + i \int d^3\vec{r}_m dt_m V(\vec{r}_1, \vec{r}_m) \delta(t_1 - t_m) K_{N+1}(1\dots N, m; 1'\dots N', m^+) .$$

(m^+ bedeutet: die Zeit ist bei der Integration über t_m an dieser Stelle $t_m^+ = t_m + 0$ zu setzen, damit die richtige Reihenfolge der Feldoperatoren erzwungen wird.)

Dabei ist $H_1^0 = -\frac{1}{2m} \nabla_1^2$ der HAMILTON-Operator ohne Wechselwirkung. Bezeichnen wir mit $G_0(11')$ den zu

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_1^0 \right)$$

inversen Operator und multiplizieren damit die Bewegungsgleichung durch, so entsteht eine Hierarchie von Integral-

¹⁾ A.B. MIGDAL, a.a.O.

gleichungen für die GREEN-Funktionen K_N in der Form einer Rekursionsbeziehung. Verschwindet die Wechselwirkung V , dann gilt für die Einteilchen-GREEN-Funktion G

$$G = K_1(11') = G_0(11').$$

$G_0(11')$ ist also die Einteilchen-GREEN-Funktion des wechselwirkungsfreien Systems. Es liegt nahe, die Bewegungsgleichungen durch eine Iteration derart zu lösen, daß eine Entwicklung nach Potenzen der Wechselwirkung entsteht. Auf diese Weise ist es möglich, jede GREEN-Funktion durch G_0 und das Potential V auszudrücken. Dies ist die Methode der Störungstheorie, welche sich in dieser Form für das kernphysikalische Vielteilchenproblem jedoch als unbrauchbar erweist.

3.2. Selbstenergie.

Die Bewegungsgleichungen können uns nur dann weiterhelfen, wenn wir das gekoppelte System in seiner Gesamtheit für alle GREEN-Funktionen K_N lösen. Interessieren wir uns nur für die Einteilchen-GREEN-Funktion, dann werden wir eine geschlossene Gleichung für $G=K_1$ suchen. Aus der Bewegungsgleichung

$$G(11') = G_0(11') + i \int d\tau_2 d\tau_3 G_0(12) V(23) \delta(t_2 - t_3) K_2(23, 1'3^+)$$

können wir die Zweiteilchen-GREEN-Funktion K_2 formal durch die Definition einer neuen Größe Σ entfernen:

$$\int d\tau_3 iV(23) \delta(t_2 - t_3) K_2(23, 1'3^+) = \int d\tau_3 \Sigma(23) G(31').$$

(Mit $d\tau$ wird das vierdimensionale Volumelement bezeichnet:

$d\tau = d^3\vec{r} dt$.) Diese so erklärte Größe Σ nennen wir die Selbstenergie und können mit ihrer Hilfe die Bewegungsgleichung in der Form

$$G(11') = G_0(11') + \int d\tau_2 d\tau_3 G_0(12) \Sigma(23) G(31')$$

schreiben (DYSON-Gleichung).

Graphisch wollen wir diese Gleichung durch das Diagramm

$$1 \longrightarrow 1' = 1 \longrightarrow 1' + 1 \longrightarrow 2 \text{ } \bigcirc \text{ } \sum \text{ } 3 \longrightarrow 1'$$

darstellen. Bei der iterativen Lösung der DYSON-Gleichung entsteht eine geometrische Reihe. Vergleichen wir diese mit der Iterationsreihe der ursprünglichen Bewegungsgleichung, dann sehen wir, daß in dem Blockdiagramm



alle Diagramme aufsummiert sind, die sich nicht durch Aufschneiden einer G_0 -Linie in zwei Teile zerlegen lassen.

Die Selbstenergie ist räumlich stark lokalisiert, d.h. es sind nur Koordinatendifferenzen von der Größe einer charakteristischen Länge $\frac{\hbar}{p_F}$ (p_F : FERMI-Impuls) wesentlich. Bei normalen FERMI-Systemen gilt dies auch für die Zeitargumente, die charakteristische Zeitdifferenz ist dann $\frac{\hbar}{\epsilon_F}$ (ϵ_F : FERMI-Energie).

3.3. Quasiteilchen.

Um die Quasiteilchenhypothese einzuführen, betrachten wir die Spektraldarstellung der Einteilchen-GREEN-Funktion. Schieben wir in der GREEN-Funktion

$$G_{\lambda\lambda'}(t-t') = i \langle 0 | T a_{\lambda}(t) a_{\lambda'}^{\dagger}(t') | 0 \rangle$$

zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperator für $t > t'$ das vollständige System der Energiezustände $|s(A+1)\rangle$ des $(A+1)$ -Teilchensystems und für $t < t'$ das System $|s(A-1)\rangle$ des $(A-1)$ -Teilchensystems ein, erhalten wir

$$G_{\lambda\lambda'}(t-t') = \begin{cases} -i \sum (a_{\lambda})_{0s} (a_{\lambda'}^{\dagger})_{s0} \exp(-i(t-t')(E_s(A+1) - E_0(A))) & t > t' \\ -i \sum (a_{\lambda'}^{\dagger})_{0s} (a_{\lambda})_{s0} \exp(i(t-t')(E_s(A-1) - E_0(A))) & t < t' \end{cases}$$

oder nach Übergang zur Fouriertransformierten bezüglich $(t-t')$:

$$G_{\lambda\lambda'}(\epsilon) = \sum_s \frac{(a_{\lambda})_{0s} (a_{\lambda'}^\dagger)_{s0}}{\epsilon - E_s + E_0 + i\gamma} + \sum_s \frac{(a_{\lambda'}^\dagger)_{0s} (a_{\lambda})_{s0}}{\epsilon + E_s - E_0 - i\gamma}.$$

Wir nehmen nun an, das System enthalte ein Anregungsspektrum, welches dem Einteilchenanregungsspektrum eines idealen FERMI-Gases entspricht. Diese Quasiteilchenzustände sind Anregungszustände, die durch die Quantenzahlen eines Teilchens vollständig gekennzeichnet werden. Nehmen wir also an, unter den Zwischenzuständen $|s(A+1)\rangle$ befinde sich ein Zustand $|\phi_{\lambda'}\rangle$, der ein Quasiteilchen (λ) enthält (entsprechend ein Zustand $|\phi_{\lambda}\rangle$ des $(A-1)$ -Teilchensystems, welcher ein Quasiloch enthält). Quasiteilchen(loch) mögen die Energien

$$\begin{aligned}\epsilon_{\lambda'}^+ &= E_{\lambda'}(A+1) - E_0(A) \\ \epsilon_{\lambda}^- &= E_0(A) - E_{\lambda}(A-1)\end{aligned}$$

besitzen. Diese Zustände wollen wir dann aus der Spektraldarstellung isolieren

$$G_{\lambda\lambda}(\epsilon) = \delta_{\lambda\lambda} \left\{ \frac{|(a_{\lambda})_{0\lambda}|^2}{\epsilon - \epsilon_{\lambda}^+ + i\gamma} + \frac{|(a_{\lambda}^\dagger)_{0\lambda}|^2}{\epsilon - \epsilon_{\lambda}^- - i\gamma} \right\} - \sum_s \left\{ \frac{\dots}{\dots} + \frac{\dots}{\dots} \right\}.$$

Dabei enthält $\tilde{\Sigma}$ alle übrigen Anregungszustände, sowohl solche, die sich als Anregung von mehreren Quasiteilchen und Quasilöchern klassifizieren lassen, als auch kompliziertere Zustände wie Phononenanregungen. Liegt ϵ in der Nähe der Quasiteilchen(loch)energie ϵ_{λ}^+ (ϵ_{λ}^-), können wir den Beitrag dieser Zustände weglassen.

3.4. DYSON-Gleichung.

Sei $\{\phi_\lambda\}$ ein vollständiges Funktionensystem. Die DYSON-Gleichung lautet in dieser Darstellung, wenn wir bereits zur Energiedarstellung übergehen,

$$\left[\epsilon \delta_{\lambda\lambda} - \left(\frac{p^2}{2m} + \tilde{\Sigma} \right)_{\lambda\lambda} \right] G_{\lambda\lambda} = \delta_{\lambda\lambda} .$$

Spezialisieren wir die Basis $\{\phi_\lambda\}$ durch die Forderung, daß die Einteilchen-GREEN-Funktion diagonal werden soll, so müssen die Einteilchenfunktionen ϕ_λ der folgenden Gleichung genügen:

$$\frac{p^2}{2m} \phi_\lambda(\vec{r}, \epsilon) + \int d^3r' \tilde{\Sigma}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon) \phi_\lambda(\vec{r}', \epsilon) = E_\lambda(\epsilon) \phi_\lambda(\vec{r}, \epsilon) .$$

Die Gleichung hat die Form einer zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung für ein Teilchen, und die Selbstenergie spielt die Rolle eines energieabhängigen, nichtlokalen Einteilchenpotentials. Beim Übergang zur gemischten Darstellung

$$\tilde{\Sigma}(\vec{r}, \vec{p}, \epsilon) = \int d^3r' \tilde{\Sigma}(\vec{r}, \vec{r}', \epsilon) \exp(i(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{p}) \quad (3.4.1)$$

können wir die Nichtlokalität durch eine Impulsabhängigkeit ersetzen.

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \tilde{\Sigma}(\vec{r}, \vec{p}, \epsilon) \right] \phi_\lambda(\vec{r}, \epsilon) = E_\lambda \phi_\lambda(\vec{r}, \epsilon) .$$

Die Pole der Einteilchen-GREEN-Funktion sind Lösungen der Gleichung

$$\epsilon = E_\lambda(\epsilon) .$$

Wir wollen nur solche Fälle betrachten, bei welchen zu gegebenem λ genau eine Lösung $\epsilon = \epsilon_\lambda$ existiert; wenn die Energieabhängigkeit der Selbstenergie vernachlässigbar ist, können wir dies auch erwarten. Das Residuum der GREEN-Funktion ist dann gegeben durch

$$a_\lambda = \left(1 - \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial \epsilon} \right)_{\lambda\lambda}^{-1} .$$

Um die Einteilchen-GREEN-Funktion an den Polstellen zu diagonalisieren, müssen wir die Funktionen $\phi_\lambda (\epsilon = \epsilon_\lambda)$ benutzen und es gilt

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \tilde{\Sigma}(\vec{r}, \vec{p}, \epsilon_\lambda) \right] \phi_\lambda = \epsilon_\lambda \phi_\lambda.$$

G hat dann in dieser Darstellung die Form

$$G_{\lambda\lambda} = \frac{a_\lambda}{\epsilon - \epsilon_\lambda} \delta_{\lambda\lambda}.$$

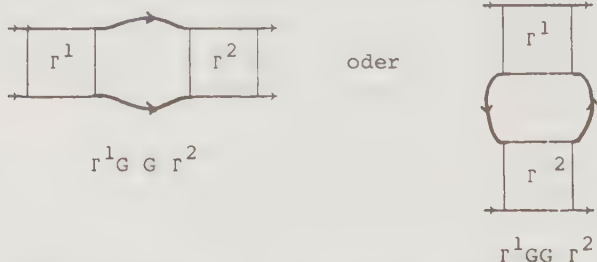
Ein Vergleich mit der im Zusammenhang mit der Spektraldarstellung eingeführten Quasiteilchenhypothese zeigt, daß wir ϵ_λ mit der Quasiteilchenenergie und ϕ_λ mit der Wellenfunktion des Quasiteilchens identifizieren können. Außerdem sehen wir auf diese Weise den Zusammenhang zwischen der Quasiteilchenhypothese und der Energieabhängigkeit der Selbstenergie.

Unter der Voraussetzung, daß die Selbstenergie mit einer charakteristischen Reichweite $\frac{\hbar}{p_F}$ lokalisiert ist, genügt es, in (3.4.1) die ersten Glieder der Exponentialreihe bzw. in $\tilde{\Sigma}$ die ersten Terme einer Potenzreihenentwicklung nach $\vec{p}$ zu berücksichtigen. Im homogenen System kann die Selbstenergie nur von der Differenz der Koordinaten abhängen. Für diesen Fall verschwinden in der Entwicklung alle Beiträge ungerader Ordnung, d.h. $\tilde{\Sigma}$ hängt nur von $\vec{p}^2$ ab. Zwar gilt dies im endlichen System nicht mehr, jedoch sind die Korrekturen nur an der Oberfläche von Bedeutung, wo die Dichte sich merklich ändert. Wir wollen die Gleichung in der Umgebung der FERMI-Kante verwenden und entwickeln deshalb an der Stelle $\vec{p}^2 = p_F^2$. Dann führt das konstante Glied der Entwicklung zu einem lokalen, effektiven Einteilchenpotential und der folgende Term zu einer effektiven Masse m^* . Unter der Voraussetzung einer schwachen Energieabhängigkeit der Selbstenergie können wir auch bezüglich der Energievariablen an der Stelle $\epsilon = \epsilon_F$ entwickeln.

Dabei bedeutet w_s die antisymmetrisierte Wechselwirkung, die Pfeile kennzeichnen die Reihenfolge der Argumente in den GREEN-Funktionen.

3.6. BETHE-SALPETER-Gleichung.

Mit Hilfe eines Verfahrens analog zur Einführung der Selbstenergie in der DYSON-Gleichung lassen sich nützliche Integralgleichungen für die Streuamplitude r ableiten. Seien durch r^1 und r^2 Prozesse beschrieben, die zu r beitragen, dann liefert der iterierte Prozess



wieder einen Beitrag zu r . Wir können alle Diagramme zu r danach durchmustern, ob sie sich auf diese Weise darstellen lassen oder nicht. Für unsere Zwecke ist es vorteilhaft, die Beiträge zu r nach dem Schema (Teilchen-Loch-Kanal)



zu zerlegen. Das einfachste Diagramm dieser Art ist



Die Summe aller Prozesse, welche sich nicht auf diese Weise darstellen lassen, bezeichnen wir mit U . Die gesamte Streuamplitude können wir aus U erhalten, indem wir die Integralgleichung

$$\Gamma = U + U G G \Gamma$$

(BETHE-SALPETER-Gleichung) lösen.

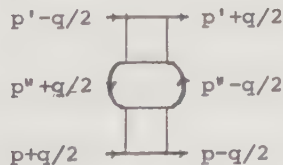
3.7. Γ für kleine Impulsübertragung.

Für den Fall kleiner Impuls (Energie)übertragung ist es sinnvoll, die Streuamplitude in der beschriebenen Weise nach dem Teilchen-Loch-Kanal zu analysieren, weil gerade die Beiträge, die von der Form



sind, stark vom übertragenen Impuls abhängen.

In den herausgezogenen Einteilchen-GREEN-Funktionen kann wegen der Impulserhaltung nur über einen Impuls integriert werden. Ist $q = (\vec{k}, \omega)$ der Impulsübertrag, dann lassen sich solche Beiträge in der Form



schreiben. Das Produkt der beiden GREEN-Funktionen wird für

$$q \rightarrow 0$$

singulär. Treten zwischen den Blöcken vier und mehr GREEN-Funktionen auf, so werden die Impulse durch den Erhaltungssatz nicht weiter festgelegt, und deswegen tritt die Singularität bei solchen Beiträgen nicht in Erscheinung.

3.8. Renormierung der BETHE-SALPETER-Gleichung.

Die Streuamplitude Γ interessiert uns nur für Zustände in der Umgebung der FERMI-Oberfläche. Diese Bescheidenheit bringt uns in der BETHE-SALPETER-Gleichung nicht viel ein, weil noch über den ganzen Impuls- und Energiebereich integriert wird. Es ist nun möglich, durch eine geeignete Renormierung eine geschlossene Integralgleichung für die Streuamplitude in der Umgebung der FERMI-Oberfläche zu gewinnen. Die Singularität im Produkt der Einteilchen-GREEN-Funktionen tritt gerade dann auf, wenn die eine ein Lochzustand, die andere einen Teilchenzustand an der FERMI-Oberfläche beschreibt. Den singulären Anteil des Produkts GG nennen wir A; bei der Integration projiziert A die Zustände in unmittelbarer Umgebung des FERMI-Niveaus heraus. Berücksichtigen wir in der BETHE-SALPETER-Gleichung nur diesen singulären Anteil A, dann müssen wir den irreduziblen Block U renormieren; den so renormierten irreduziblen Anteil von U nennen wir F. Die Integralgleichung für Γ erhält schließlich auf diese Weise die gewünschte Gestalt

$$\Gamma = F + F A \Gamma .$$

Bei den GREEN-Funktionen, die im Inneren der Beiträge zu F auftreten, sind nur noch Zustände weit weg vom FERMI-Niveau wesentlich, alle Anteile von Γ , die empfindlich von der Einteilchenstruktur an der FERMI-Oberfläche abhängen, haben wir explizit herausgezogen.

In der Impulsdarstellung kann im homogenen System Γ nur noch vom Winkel zwischen den Impulsen der einlaufenden Teilchen abhängen. Setzen wir für diese Abhängigkeit eine Entwicklung nach LEGENDRE-Polynomen an

$$F = \sum_1 F_1 P_1 \left(\frac{\vec{p} \vec{p}'}{p_F^2} \right) ,$$

dann sind die Koeffizienten F_1 im unendlichen System Konstanten.

Dabei haben wir allerdings bis jetzt die Spin- und Isospinfreiheitsgrade nicht betrachtet. Wenn wir Korrelationen zwischen Spin und Impuls nicht zulassen, dann muß F_1 die Form

$$F_1 = \phi_1 + \phi_1'(\vec{\tau}\vec{\tau}') + \gamma_1 \vec{\sigma}\vec{\sigma}' + \gamma_1'(\vec{\sigma}\vec{\sigma}')(\vec{\tau}\vec{\tau}') \quad (3.8.1)$$

besitzen.

3.9. F im endlichen System.

Sei $\{\phi_\lambda\}$ wieder eine Basis von Einteilchenfunktionen, die renormierte Integralgleichung für Γ lautet dann in dieser Darstellung

$$(\lambda_1 \lambda_2 | \Gamma | \lambda_3 \lambda_4) = (\lambda_1 \lambda_2 | F | \lambda_3 \lambda_4) + \sum (\lambda_1 \lambda_2 | F | \lambda \lambda') \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\epsilon_\lambda - \epsilon_{\lambda'} + \omega} (\lambda \lambda' | \Gamma | \lambda_3 \lambda_4).$$

Dabei bedeutet n_λ die Besetzungszahl des Quasiteilchenzustandes λ mit der Energie $\epsilon = \epsilon_\lambda$. Die Größe ω ist die übertragene Energie. Im endlichen System läßt sich der Impulssatz nicht mehr für die Beiträge zur Streuamplitude Γ verwenden. Die irreduzible, renormierte Wechselwirkung F hat im homogenen System eine Reichweite von der gleichen Größenordnung wie die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Wenn wir uns die Atomkerne aus Kernmaterie, deren Dichte in einer Oberflächenschicht gegen Null geht, bestehend vorstellen dürfen, dann sollte sich F ebenfalls nur an der Oberfläche vom homogenen System wesentlich unterscheiden. Es kann hierdurch sowohl eine Abhängigkeit vom übertragenen Impuls wie eine Spin-Bahn-Kopplung auftreten.

Wir wollen uns an diesem Punkt jedoch jede weitere Philosophie ersparen und die endliche Ausdehnung des Systems nur durch eine Abhängigkeit vom Abstand zum Kernmittelpunkt in der Form

$$F(r) = F_a + F_b \frac{1}{1 - \exp((r-R)/a)} \quad (3.9.1)$$

berücksichtigen. Für die Matrixelemente von F machen wir

den Ansatz

$$(\lambda_1 \lambda_2 | F | \lambda_3 \lambda_4) = \int d^3 r \phi_{\lambda_1}^\dagger(\vec{r}) \phi_{\lambda_2}(\vec{r}) F(|\vec{r}|) \phi_{\lambda_4}^\dagger(\vec{r}) \phi_{\lambda_3}(\vec{r}) ,$$

wobei die Spin- und Isospinabhängigkeit die gleiche wie in (3.8.1) sein soll.

4. ÄNDERUNGEN DER GRUNDZUSTANDSENERGIE.

4.1. Grundzustandsenergie.

Die Energie E_0 des Grundzustandes, die sich aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V zusammensetzt,

$$E_0 = \langle 0 | T + V | 0 \rangle$$

läßt sich auf einfache Weise durch die Einteilchen-GREEN-Funktion ausdrücken, wenn wir die Identität

$$H = \frac{1}{2} \left\{ T + \int d^3 r \psi^\dagger(\vec{r}) |\psi(\vec{r}), H|_- \right\}$$

für den Hamiltonoperator H ausnutzen, welche unter der Voraussetzung von Zweikörperkräften erfüllt ist.¹⁾ Der Erwartungswert des Einteilchenoperators T kann dann auf die Besetzungszahl

$$n = \oint \frac{d\epsilon}{2\pi i} G(\epsilon)$$

und der Erwartungswert des Anteils der potentiellen Energie auf das Integral

$$\oint \frac{d\epsilon}{2\pi i} G(\epsilon) \epsilon$$

zurückgeführt werden. Dabei verläuft der Integrationsweg über die reelle Achse und in der oberen komplexen Halbebene im Unendlichen zurück.

¹⁾ P. NOZIERES, Theory of Interacting Fermi Systems, S. 67, N.Y. 1964.

Im räumlich homogenen System erhalten wir auf diese Weise

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \oint \frac{d\epsilon}{2\pi i} G_k(\epsilon) \left\{ \frac{k^2}{2m} + \epsilon \right\}$$

oder unter Verwendung der DYSON-Gleichung

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \oint \frac{d\epsilon}{2\pi i} G_k(\epsilon) \left\{ \frac{k^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum (k, \epsilon) \right\}.$$

In der -Darstellung für das endliche System lautet dies folgendermaßen:

$$E_0 = \sum_{\lambda\lambda'} \oint \frac{d\epsilon}{2\pi i} G_{\lambda\lambda'}(\epsilon) \left\{ \frac{k^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum (\epsilon) \right\}_{\lambda\lambda'}.$$

Wählen wir speziell die Funktionen ϕ_λ , die die Einteilchen-GREEN-Funktion diagonalisieren und der Gleichung

$$\left[\frac{k^2}{2m} + \sum (k, \epsilon) \right] \phi_\lambda = \epsilon_\lambda \phi_\lambda$$

genügen, erhalten wir für die Grundzustandsenergie schließlich

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_\lambda \int d^3r \left[\phi_\lambda^\dagger(\vec{r}) \frac{k^2}{2m} \phi_\lambda(\vec{r}) + \epsilon_\lambda |\phi_\lambda|^2 \right].$$

Dieses Ergebnis ist analog zur Gesamtenergie eines idealen FERMI-Gases. Wegen der Energieabhängigkeit der Selbstenergie sind die Funktionen ϕ_λ im Unterschied zum einfachen Modell unabhängiger Nukleonen selbst energieabhängig und bilden streng genommen auch kein orthonormiertes System.

Die angegebene Beziehung für die Grundzustandsenergie ist zwar exakt, kann aber erst dann ausgewertet werden, wenn wir Näherungsannahmen für den Selbstenergieanteil bzw. die Einteilchen-GREEN-Funktion machen. Für unsere Problemstellung können wir auch vollständig darauf verzichten, die Grundzustandsenergie selbst zu bestimmen, wir interessieren uns nur für gewisse Änderungen von E_0 .

Um diese Aufgabe zu lösen, sind die diskutierten Gleichungen wenig geeignet, sie enthalten nämlich jeweils eine Summe über alle besetzten Einteilchenzustände λ . Es wäre also

zu berechnen, wie die Energien ϵ_λ und die Funktionen ϕ_λ bei Änderungen der Protonen- und Neutronenzahlen variieren. In erster Näherung werden wir eine Änderung in der Tiefe des Einteilchenpotentials erwarten, d.h. zur Änderung der Gesamtenergie werden auch Einteilchenniveaus ϵ_λ im Inneren der FERMI-Kugel beitragen. Die Methode der Quasiteilchen, deren wir uns bei unseren Untersuchungen im folgenden bedienen wollen, erlaubt zunächst nur, Schlußfolgerungen über Zustände in der Umgebung der FERMI-Kante zu ziehen. Wir werden dementsprechend danach trachten müssen, die Annahmen des Quasiteilchenmodells direkt in die Überlegungen zur Änderung der Grundzustandsenergie einzubeziehen, um Annahmen über Zustände im Inneren der FERMI-Kugel zu vermeiden.

4.2. Chemisches Potential.

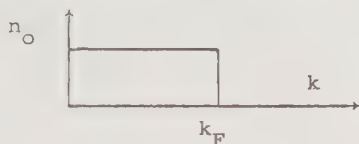
Betrachten wir in der Umgebung magischer Zahlen gg-Kerne, so sollten die Grundzustände der benachbarten Atomkerne mit ungerader Nukleonenzahl in guter Näherung als Quasiteilchen- bzw. Quasilochzustände beschrieben werden können. So wird der Drehimpuls eines solchen Kerns durch die Drehimpulsquantenzahl des Einteilchenzustandes gegeben, in welchem sich das Quasiteilchen bzw. -Loch befindet. Die Quasiteilchenenergie ist dann durch das chemische Potential μ^+ gegeben:

$$\epsilon = \mu^+ = E_0(A+1) - E_0(A) \quad .$$

Demnach läßt sich das chemische Potential aus der Lage des Quasiteilchenpols der Einteilchen-GREEN-Funktion bestimmen. Anstatt Änderungen der Grundzustandsenergie E_0 selbst zu untersuchen, genügt es für unsere Zwecke, Änderungen des chemischen Potentials zu betrachten, d.h. wir interessieren uns für die Verschiebung des Quasiteilchenpols bei der Abwandlung der Protonen- bzw. Neutronenzahl. Um Einteilchenzustände im Inneren der FERMI-Kugel brauchen wir uns bei dieser Methode nicht mehr genauer zu kümmern. Allerdings ist sie nur insofern gültig, als die Annahmen des Quasiteilchenmodells zutreffen.

4.3. LANDAU-Theorie.¹⁾

Ein ideales FERMI-Gas ist im homogenen System durch die Verteilungsfunktion $n_0(k)$ charakterisiert, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Einteilchenzustände mit dem Impuls k , bzw. im Impulsintervall $(k, k+dk)$ besetzt sind.



Impulsverteilung $n_0(k)$.

Die Gesamtenergie E ändert sich bei einer infinitesimalen Änderung der Verteilungsfunktion um den Betrag

$$\delta E = \int_k \frac{k^2}{2m} \delta n(k) \quad .$$

Das bedeutet, die Einteilchenenergie ϵ_k kann als Funktionalableitung der Energie nach der Verteilungsfunktion definiert werden:

$$\epsilon_k = \frac{\delta E}{\delta n(k)} \quad .$$

Das reale Gas läßt sich in der LANDAU-Theorie wieder durch eine Verteilungsfunktion $n_0(k)$ beschreiben, nur gibt $n_0(k)$ jetzt die Verteilung der Quasiteilchen an. Dabei soll der Zustand, der ein Quasiteilchen mit Impuls k enthält, durch das Einschalten der Wechselwirkung kontinuierlich aus dem durch Hinzufügen eines Teilchens mit Impuls k zum Grundzustand entstandenen Zustand des idealen Gases hervorgegangen sein.

Die Quasiteilchenenergie ist wieder als Funktionalableitung

$$\epsilon_k = \frac{\delta E[n(k)]}{\delta n(k)}$$

zu definieren; im realen Gas ist sie aber selbst ein Funktional der Verteilungsfunktion $n(k)$.

¹⁾ L.D. LANDAU, J. Exp. Theor. Phys. (U.S.S.R) 30, 1058 (1956).

Nehmen wir an, der Grundzustand des (A+1)-Teilchensystems sei ein Zustand mit einem Quasiteilchen mit dem FERMI-Impuls k_F , so wird die Quasiteilchenenergie an der FERMI-Kante einfach durch das chemische Potential μ gegeben:

$$\epsilon(k=k_F) = \mu.$$

Weil die Quasiteilchenenergie ein Funktional der Verteilungsfunktion $n(\vec{k})$ ist, werden kleine Änderungen $n(\vec{k})$ die Variation

$$\delta\epsilon(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}'} f(\vec{k}, \vec{k}') \delta n(\vec{k}') \quad (4.3.1)$$

in der Quasiteilchenenergie hervorrufen. Dabei ist die Größe f definiert durch

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{\delta\epsilon(\vec{k})}{\delta n(\vec{k}')} = \frac{\delta^2 E}{\delta n(\vec{k}) \delta n(\vec{k}')} = f(\vec{k}', \vec{k}).$$

Betrachten wir $\epsilon(\vec{k})$ als die Energie des Quasiteilchens in einem mittleren, effektiven Einteilchenpotential, so beschreibt die Funktion $f(\vec{k}, \vec{k}')$ die Änderung dieses mittleren Feldes. Speziell erhalten wir für die Variation des chemischen Potentials

$$\delta\mu = \sum_{\vec{k}'} f(|\vec{k}|=k_F, \vec{k}') \delta n(\vec{k}').$$

Sehen wir einmal vom Spin ab, so hängt die Wechselwirkung zwischen den Quasiteilchen noch vom Isospin ab, was wir am einfachsten durch zwei Funktionen f^{PP} und f^{PN} ausdrücken können, wobei

$$f^{PP} = f^{NN}$$

die Wechselwirkung zwischen Proton- bzw. Neutron-Quasiteilchen untereinander und

$$f^{PN} = f^{NP}$$

diejenige zwischen Neutron- und Proton-Quasiteilchen repräsentieren soll. Außerdem hängt $f(\vec{k}, \vec{k}')$ noch vom Winkel zwischen den Impulsen $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ ab (der Betrag $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$ soll schon auf die Umgebung der FERMI-Kante $|\vec{k}| = k_F$ eingeschränkt sein).

Nehmen wir einmal an, daß wir uns auf den ersten, winkel-unabhängigen Term mit $l=0$ in der Entwicklung

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_l f_l P_l(\cos(\vec{k}, \vec{k}'))$$

beschränken können, so läßt sich die Änderung des chemischen Potentials durch zwei Konstanten f^{PP} und f^{PN} ausdrücken

$$\begin{aligned}\delta\mu^P &= f^{PP} \sum_k \delta n^P(k) + f^{PN} \sum_k \delta n^N(k) \\ \delta\mu^N &= f^{PN} \sum_k \delta n^P(k) + f^{PP} \sum_k \delta n^N(k) .\end{aligned}$$

4.4. Änderung der Quasiteilchenenergie.

Die Änderung der Quasiteilchenenergie ϵ_λ bzw. des chemischen Potentials μ läßt sich im allgemeinen Formalismus der GREEN-Funktionen durch die Verknüpfung mit der Änderung im Selbstenergieanteil Σ einführen. Die Lage des Quasiteilchenpols können wir mit Hilfe der DYSON-Gleichung durch die Selbstenergie ausdrücken. Benutzen wir für Σ die gemischte Ort- Impulsdarstellung und betrachten wir den Pol an der Stelle $\epsilon = \mu$, so gilt für das chemische Potential

$$\mu = \frac{\vec{p}_F^2(\vec{r})}{2m} + \Sigma(\vec{r}, \vec{p}_F, \mu) .$$

Für die Variation von μ ergibt sich daraus die Beziehung

$$\delta\mu = \frac{\delta \Sigma}{(1 - \frac{\delta \Sigma}{\delta \epsilon})_{\epsilon=\mu}} = a^\mu \delta \Sigma \Big|_{\epsilon=\mu} . \quad (4.4.1)$$

Dabei ist a^μ der Renormierungsfaktor der Einteilchen-GREEN-Funktion, d.h. das Residuum von G am Pol $\epsilon=\mu$.

Die Verschiebung des Quasiteilchenpols können wir jetzt bestimmen, wenn wir den Zusammenhang zwischen $\delta \Sigma$ und der Quasiteilchenwechselwirkung F kennen.

4.5. Änderung der Selbstenergie Σ .

Um eine Gleichung für die Änderung der Selbstenergie abzuleiten, gehen wir davon aus, daß die Funktionalableitung des Selbstenergieanteils nach der Einteilchen-GREEN-Funktion gerade den bezüglich der Teilchen-Loch-Linien irreduziblen Teil U der Streuamplitude Γ ergibt. Eine Änderung von Σ ist also ganz allgemein mit der Änderung

$$\delta G = \bar{G} - G$$

der Einteilchen-GREEN-Funktion ($\bar{G}$ neue, G alte GREEN-Funktion) durch die Relation

$$\delta \Sigma = U \delta G$$

verknüpft.

Weil U als der bezüglich Teilchen-Loch-Linien irreduzible Anteil von Γ definiert ist, genügt es der BETHE-SALPETER-Gleichung

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of } \Gamma \\ \Gamma \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram of } U \\ U \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram of } U G G \Gamma \\ U G G \Gamma \end{array} .$$

Schließen wir zwei freie Enden von Γ mit Hilfe einer neuen Funktion D und definieren uns damit eine Größe H

$$H = D = \begin{array}{c} \text{Diagram of } D \\ D \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram of } \Gamma \\ \Gamma \end{array} .$$

H löst dann die Integralgleichung

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of } H \\ H \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram of } U D \\ U D \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram of } U G G H \\ U G G H \end{array} .$$

Auf der anderen Seite läßt sich die Änderung der Einteilchen-GREEN-Funktion, die durch eine Variation in Σ hervorgerufen wird, mit Hilfe der DYSON-Gleichung

$$\bar{G} = G + G \delta \Sigma \bar{G}$$

bestimmen. Eine Integralgleichung für $\delta \Sigma$ erhalten wir, wenn wir $\delta G = G \delta \bar{G}$ in die Relation

$$\delta \Sigma = U \delta G$$

einsetzen:

$$\delta \Sigma = U G \bar{G} \delta \Sigma .$$

Hierbei ist zu beachten, daß $\delta \Sigma$ auch noch implizit in $\bar{G}$ enthalten ist.

Um die BETHE-SALPETER-Gleichung verwenden zu können, müssen wir an Stelle von $G \bar{G}$ das Produkt zweier GREEN-Funktionen zum gleichen System erzeugen. Mit der Definition

$$\delta_0 G = (G - \bar{G}) \delta \Sigma \bar{G}$$

können wir obige Integralgleichung in der angestrebten Form schreiben

$$\delta \Sigma = U \delta_0 G + U \bar{G} \bar{G} \delta \Sigma .$$

Ein Vergleich mit der Gleichung für die zuerst erklärte Größe H zeigt, daß $\delta \Sigma$ und H diesselbe Integralgleichung lösen, wenn wir die Hilfsfunktion D mit $\delta_0 G$ identifizieren.

Damit haben wir formal eine Lösung der Integralgleichung für $\delta \Sigma$ gewonnen, nämlich

$$\delta \Sigma = \Gamma \delta_0 G .$$

Dies liefert allerdings erst dann ein Ergebnis, wenn es gelingt $\delta_0 G$ durch Größen auszudrücken, welche für die beiden zu vergleichenden Systeme explizit angegeben werden können.

Wir merken noch an, daß wir bei unserer Ableitung bereits eine Näherungsannahme implizit gemacht haben. Für endliche

Änderungen gilt die Beziehung

$$\delta \sum = U \delta G$$

natürlich nur, wenn die Änderung von U dabei vernachlässigt werden kann. Die abgeleiteten Gleichungen werden also für große relative Änderungen in $\sum$ nicht mehr brauchbar sein.

Um die Bedeutung der Größe G zu klären, diskutieren wir zunächst noch einmal die Änderung in der Einteilchen-GREEN-Funktion. Als Basis der Darstellung wollen wir die Funktionen ϕ_λ benutzen, welche die GREEN-Funktion G diagonalisieren

$$G_{\lambda\lambda'} = G_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Die neue GREEN-Funktion $\bar{G}$ wird in dieser Darstellung im allgemeinen nicht mehr diagonal bleiben, ebenso wird dann $\delta \sum$ Nichtdiagonalelemente aufweisen. Wenn wir in der Gleichung

$$\delta G = G \delta \sum \bar{G}$$

die Summation über Diagonal- und Nichtdiagonalelemente getrennt ausführen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\lambda\lambda'} - G_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} &= G_\lambda \delta \sum_{\lambda\lambda} \bar{G}_{\lambda\lambda} + G_\lambda \delta \sum_{\lambda\lambda'} G_{\lambda\lambda'} (1 - \delta_{\lambda\lambda'}) \\ &+ \sum_{\substack{\lambda \neq \lambda' \\ \lambda \neq \lambda'}} G_\lambda \delta \sum_{\lambda\bar{\lambda}} \bar{G}_{\bar{\lambda}\lambda}. \end{aligned}$$

Der letzte Beitrag enthält nur Produkte der Nichtdiagonalelemente von $\delta \sum$ und δG , wir können die Gleichung näherungsweise lösen, indem wir diesen Term vernachlässigen.¹⁾

Für $\lambda = \lambda'$ erhalten wir dann

$$\bar{G}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{G_{\lambda\lambda}^{-1} - \sum_{\lambda\lambda}}.$$

¹⁾ A.B. MIGDAL. a.a.O., S. 211.

Da in der Nähe der Quasiteilchenenergie ϵ_λ

$$\lim_{\epsilon_\lambda \rightarrow \epsilon_\lambda} G_\lambda^{-1}(\epsilon) = 0$$

gilt, lassen sich die Diagonalelemente von G nicht nach Potenzen von $\delta \sum$ entwickeln, was auch zu erwarten war, denn auch für kleine Variationen $\delta \sum$ wird der Pol der Einteilchen-GREEN-Funktion verschoben.

Im Gegensatz bekommen wir für die Nichtdiagonalelemente von G

$$\bar{G}_{\lambda\lambda'} = \bar{G}_{\lambda\lambda} \delta \sum_{\lambda\lambda'} \bar{G}_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda \neq \lambda') .$$

Behandeln wir die Größe

$$\delta_0 G = (G - \bar{G}) \delta \sum \bar{G}$$

mit der gleichen Methode¹⁾, so sehen wir zunächst, daß die Nichtdiagonalelemente vernachlässigt werden können. Für die Änderung der Selbstenergie genügt es also, ausschließlich die Diagonalelemente von $\delta_0 G$ zu berücksichtigen.

Damit erhalten wir schließlich das Resultat

$$\delta \sum_{\lambda\lambda}(\epsilon) = \sum_v \int \frac{d\epsilon'}{2\pi i} \Gamma(\lambda\lambda'\epsilon, v v \epsilon') \delta_0 G(\epsilon') .$$

Bei Ausführung der ϵ' -Integration liefern in $\delta_0 G$ die Polterme im Produkt $G_v \bar{G}_{vv}$ einen Beitrag, wenn die Pole von G_v und $\bar{G}_{vv}$ auf verschiedenen Seiten der reellen Achse liegen.

Beschränken wir uns auf den Beitrag dieser Pole und berücksichtigen, daß gilt

$$\int \frac{d\epsilon}{2\pi i} G_v(\epsilon) \bar{G}_{vv}(\epsilon) \delta \sum_{vv}(\epsilon) = a_v^2 \delta \sum_{vv}(\epsilon = \epsilon_v) \frac{\bar{n}_v - n_v}{\epsilon_v - \epsilon_v} = a_v (\bar{n}_v - n_v) ,$$

so ergibt sich für die Variation von $\sum$

$$\delta \sum_{\lambda\lambda'}(\epsilon) = a \sum_v \Gamma(\lambda\lambda'\epsilon, v v \epsilon_v) (\bar{n}_v - n_v) .$$

¹⁾ A.B. MIGDAL, a.a.O., S.212

Dabei ist a der Renormierungsfaktor der Einteilchen-GREEN-Funktion ($a=a^v$), n_v bzw. $\bar{n}_v$ bedeuten die Quasiteilchenbesetzungszahlen der beiden miteinander verglichenen Systeme.

Nehmen wir speziell an, das zweite System sei durch Hinzufügen eines einzigen Quasiteilchens im Zustand v_0 entstanden, so ändert sich der Selbstenergieanteil $\sum$ um

$$\delta \sum_{\lambda\lambda'} = a \Gamma(\lambda\lambda' \epsilon, v_0 v_0 \epsilon_{v_0}) .$$

Verwenden wir die renormierte BETHE-SALPETER-Gleichung für die Streuamplitude Γ , gewinnen wir schließlich eine Integralgleichung, die es uns gestattet, die gesuchte Größe $a\delta\sum$ aus der effektiven Quasiteilchenwechselwirkung F zu bestimmen:

$$(a\delta\sum)_{\lambda\lambda'} = \sum_v (\lambda\lambda' | F | vv) (\bar{n}_v - n_v) - \sum_{\substack{v, v' \\ \omega \rightarrow 0}} (\lambda\lambda' | F | vv) \frac{\bar{n}_v - \bar{n}_{v'}}{\epsilon_v - \epsilon_{v'} + \omega} (a\delta\sum)_{vv'} .$$

Die Quasiteilchenenergien und-Besetzungszahlen sind im zweiten, homogenen Teil der Integralgleichung dem System mit der Einteilchen-GREEN-Funktion $\bar{G}$ zu entnehmen, weil sich Γ in der Ableitung stets auf dieses bezieht.

4.6. Homogenes System.

Die Einteilchenfunktionen ϕ_λ , die als Basis dienen, sollen die Einteilchen-GREEN-Funktion des Ausgangssystems diagonalisieren. Die Unbestimmtheit, welche in dem Ausdruck

$$\frac{n_v - n_{v'}}{\epsilon_v - \epsilon_{v'}}$$

für $v = v'$ entsteht, haben wir durch die Einführung des Grenzwertes

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{v, v'} \frac{\bar{n}_v - \bar{n}_{v'}}{\epsilon_v - \epsilon_{v'} + \omega}$$

beseitigt. Im räumlich homogenen System werden die Gleichungen durch die Impulserhaltung wesentlich vereinfacht.

In den beiden miteinander verglichenen Systemen ist die GREEN-Funktion in der Impulsdarstellung diagonal, das gleiche gilt für die Selbstenergie Σ . Dementsprechend werden auch die Änderungen in G und im Selbstenergieanteil Σ im Impulsraum diagonal sein. In der Variation $\delta \Sigma$ kommen nur Matrixelemente der Streuamplitude Γ vor, bei welchen der Impuls einer einlaufenden und einer auslaufenden Teilchen- bzw. Lochlinie übereinstimmen, also nur Diagramme von der Form



Die Impulserhaltung, die für Γ gilt, überträgt sich deshalb auf die Änderung $\delta \Sigma$

$$\delta \Sigma_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta \Sigma_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta \Sigma_{\vec{k}, \vec{k}} \quad .$$

Im endlich ausgedehnten System können wir zwar Erhaltungssätze für die Drehimpulsquantenzahlen erwarten, es gelten jedoch sicherlich keine Auswahlregeln bezüglich der radialen Quantenzahlen der Einteilchenfunktionen ϕ_λ .

Unter Voraussetzung der Impulserhaltung trägt demnach von Γ nur die "Vorwärtsstreuamplitude"



bei. Da jedoch sowohl der übertragene Impuls wie die übertragene Energie verschwinden, müssen wir uns überlegen, welcher Grenzwert von Γ hier vorliegen muß.

Aus der oben eingeführten Vorschrift, die übertragene Energie ω erst nach der Summation über die Quantenzahlen gegen Null gehen zu lassen, folgt sofort, daß im homogenen System der übertragene Impuls schneller als die Energieübertragung verschwinden muß. Demnach haben wir den Grenzwert

$$F = \Gamma \left(\frac{k v}{\omega} \ll 1 \right)$$

einzusetzen .

Betrachten wir die Integralgleichung für $\delta \sum$, so sehen wir, daß dann der zweite, homogene Teil verschwindet und wir das einfache Ergebnis

$$\delta \sum_{\vec{k}\vec{k}'} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a \sum_{\vec{k}''} (\vec{k}\vec{k} | F | \vec{k}'' \vec{k}'') (n_{\vec{k}''} - n_{\vec{k}'})$$

bekommen. In der Tat können ja im homogenen Teil der Integralgleichung nur Nichtdiagonalelemente von $\delta \sum$ beitragen, welche im Fall der Impulserhaltung jedoch verschwinden. Dies erweist die Konsistenz unserer Überlegungen.

Ein Vergleich mit der LANDAU-Gleichung (4.3.1) für die Änderung der Quasiteilchenenergie

$$\delta \epsilon_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}'} f(\vec{k}, \vec{k}') \delta n_{\vec{k}'}$$

zeigt, daß die Quasiteilchenwechselwirkung $f(\vec{k}, \vec{k}')$ mit der Größe

$$a^2 (\vec{k}\vec{k} | F | \vec{k}'\vec{k}'))$$

identifiziert werden kann¹⁾.

4.7. Physikalische Interpretation.

Geben wir in einem realen FERMI-Gas neue Quasiteilchen hinzu, so werden auch die übrigen Quasiteilchen hierdurch beeinflusst. Sie werden die hinzugefügten Teilchen als ein statisches äußeres Feld erfahren, an das sie durch die Quasiteilchenwechselwirkung gekoppelt sind.

Ist das System räumlich homogen, so werden sich die Teilchen nach wie vor in Impulseigenzuständen befinden; das äußere homogene Feld bewirkt dann nur eine Verschiebung der Quasiteilchenenergie gemäß der LANDAU-Gleichung.

Im endlichen System dagegen werden wir zunächst den gleichen Effekt erwarten. Die Betrachtung des Übergangs vom endlichen zum homogenen System zeigt, daß der inhomogene

¹⁾ L.D. LANDAU, J. Exp. Theor. Phys. (U.S.S.R.) 35,97 (1958)

erste Teil der Integralgleichung (4.5.1) gerade dies beschreibt. Im Gegensatz zum homogenen System kann nun das Feld der hinzugefügten Quasiteilchen das Rumpfsystem durch die Anregung von Teilchen-Loch-Paaren polarisieren, dieser Effekt wird durch den zweiten Teil der Integralgleichung (4.5.1) repräsentiert. Insofern stellt die abgeleitete Integralgleichung eine Verallgemeinerung der LANDAU-Theorie dar.

Die Anregung von Teilchen-Loch-Paaren bedeutet eine gewisse Umgruppierung der Quasiteilchen, sie kann nur auftreten, wenn die Einteilchen-GREEN-Funktion und der Selbstenergieanteil in der Funktionenbasis des ursprünglichen Systems nichtdiagonal werden.

Aus der Struktur der Gleichung sehen wir, daß die spezielle Lage der Einteilchenenergie (Schalenstruktur) nur in den Polarisations-term eingehen kann. Der inhomogene Beitrag für die Änderung der Selbstenergie hängt von der Einteilchenstruktur ausschließlich durch das Überlappungsintegral der beteiligten Wellenfunktionen ab.

5. ANWENDUNG DER THEORIE AUF DIE BESTIMMUNG DER SYMMETRIEENERGIE.

5.1. Änderung im chemischen Potential.

Wie läßt sich aus dem Verhalten der chemischen Potentiale für Neutronen und Protonen die Symmetrieenergie bestimmen? Betrachten wir die Definitionsgleichung für $\mu^{\text{Prot.}}$ und $\mu^{\text{Neutr.}}$:

$$\mu^{\text{Prot.}} = E_O(Z+1, n) - E_O(Z, N)$$

$$\mu^{\text{Neutr.}} = E_O(Z, N+1) - E_O(Z, N)$$

und bilden die Differenz:

$$\mu^{\text{Neutr.}} - \mu^{\text{Prot.}} = E_O(Z, N+1) - E_O(Z, N) + E_O(Z, N) - E_O(Z+1, N)$$

$$\mu^{\text{Neutr.}} - \mu^{\text{Prot.}} = E_O(Z, N+1) - E_O(Z+1, N) .$$

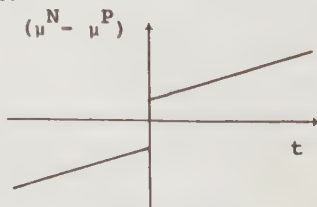
Die beiden hier auftretenden Kerne gehören zur gleichen Isobarengruppe; für die betrachtete Differenz trägt dann nur die COULOMB-Energie und die Symmetrieenergie bei. Da wir die COULOMB-Wechselwirkung völlig außer Acht lassen, müssen wir auch dementsprechend die COULOMB-Energie weglassen. Nehmen wir für die Symmetrieenergie wieder die Form an:

$$E_S = \frac{a_1(A)}{A} |t| (|t| + 2) ,$$

so ergibt sich daraus die Differenz der chemischen Potentiale

$$\mu^{\text{Neutr.}} - \mu^{\text{Prot.}} = \frac{4 a_1(A)}{A} \left\{ |t| + \frac{t}{|t|} \right\} .$$

Innerhalb einer Isobarengruppe sollte $(\mu^N - \mu^P)$ demnach die folgende Gestalt haben:

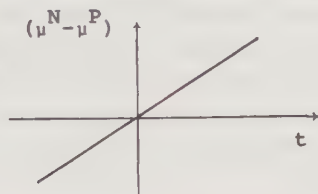


Differenz der chemischen Potentiale in Abhängigkeit von t .

Unter der Annahme

$$E_s = \frac{a_1(A)}{A} t^2$$

für die Abhängigkeit der Symmetrieenergie fällt die Unstetigkeit bei $t=0$ weg, und wir erhalten das folgende Verhalten:



Differenz der chemischen Potentiale
in Abhängigkeit von t .

In beiden Fällen sollte $(\mu^N - \mu^P)$ linear vom Neutronenüberschuß t abhängen. Um den Symmetrieparameter zu bestimmen, müssen wir innerhalb einer Isobarengruppe die Differenz der chemischen Potentiale in Abhängigkeit von t bestimmen und durch eine lineare Funktion annähern.

Betrachten wir noch einmal kurz, welche Aussagen wir im Rahmen der LANDAU-Theorie hierzu machen können. Gehen wir von einem symmetrischen Atomkern ($N=Z$) zu einem Kern mit gleicher Nukleonenzahl $A=N+Z$ und dem Neutronenüberschuß $t=N-Z$ über, so ändern wir die Verteilungsfunktion für die Neutronen bzw. Protonen um:

$$\int_k \delta n^N(k) = \frac{t}{2} \quad \int_k \delta n^P(k) = -\frac{t}{2}.$$

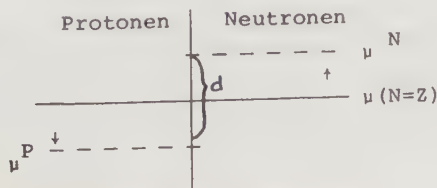
Das chemische Potential der Neutronen wird sich dann um

$$\mu^N = f^{NP} \left(-\frac{t}{2} \right) + f^{PP} \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} (f^{NP} - f^{PP}),$$

das der Protonen dagegen um

$$\mu^P = f^{PP} \left(-\frac{t}{2} \right) + f^{NP} \frac{t}{2} = \frac{t}{2} (f^{NP} - f^{PP})$$

ändern.



Verschiebung der chemischen
Potentiale.

Für die Differenz der chemischen Potentiale ergibt sich also:

$$d = \mu^N - \mu^P = (f^{PP} - f^{NP}) t \quad (5.1.1)$$

Für die Symmetrieenergie ist demnach die Differenz zwischen der Neutron-Neutron bzw. Proton-Proton Quasiteilchenwechselwirkung und der Proton-Neutron Wechselwirkung verantwortlich. Schaleneffekte können wir selbstverständlich aus der LANDAU-Theorie nicht erwarten, hier können wir höchstens die Parameter getrennt anpassen, je nachdem, ob die Neutronen und Protonen die gleichen oder verschiedene Schalen auffüllen.

5.2. Integralgleichung zur Bestimmung der Symmetrieenergie.

Um die Differenz der chemischen Potentiale für Protonen und Neutronen zu bestimmen, gehen wir vom symmetrischen Atomkern aus, für den

$$\mu^{\text{Prot.}} = \mu^{\text{Neutr.}}$$

gilt. Die gesuchte Differenz ergibt sich dann aus den Verschiebungen von $\mu^{\text{Prot.}}$ und $\mu^{\text{Neutr.}}$ beim Übergang zu einem Kern mit endlichem Neutronenüberschuß t . Die Variation von μ ist nach Gleichung (4.4.1) mit der Variation der Selbstenergie verknüpft:

$$\delta\mu = a\delta\bar{\epsilon} \quad .$$

(Wir nehmen dabei an, daß der Renormierungsfaktor a konstant ist.)

Die Änderung der Selbstenergie ist in der λ -Darstellung zunächst noch eine Matrix; wir bezeichnen die Größe $(a\delta\bar{\epsilon})$ als das effektive Feld, das die Quasiteilchen durch die Änderung der Nukleonenkonfiguration erfahren:

$$v_{\lambda\lambda'}^{\text{eff.}} = a \delta \bar{\epsilon}_{\lambda\lambda'}$$

Die im Abschnitt 4.5 beschriebene Methode zur Bestimmung von $\delta\bar{\epsilon}$ ist nur gültig für kleine Änderungen, wir beschränken uns deshalb auf die in den Diagonalelementen von $\bar{\epsilon}$. Das chemische Potential kann demjenigen Diagonalelement von $\delta\bar{\epsilon}$ entnommen werden, welches gerade zu dem Quasiteilchenpol

$\epsilon_{\lambda} = \mu$ gehört:

$$\delta\mu = \left. V_{\lambda\lambda}^{\text{eff.}} \right|_{\lambda=\mu}.$$

Bezeichnen wir mit $V_{\lambda\lambda}^0$, den Beitrag zu $(a\delta)$ ohne Berücksichtigung der Teilchen-Loch-Paare, mit n_s die Besetzungszahlen des symmetrischen, mit n die des unsymmetrischen Kerns, so lautet die Integralgleichung (4.5.1) für unser Problem:

$$V_{\lambda\lambda'}^{\text{eff.}} = V_{\lambda\lambda'}^0 + \sum_{\substack{\nu, \nu' \\ \omega \rightarrow 0}} (\lambda\lambda' | F | \nu\nu') \frac{n_{\nu} - n_{\nu'}}{\epsilon_{\nu} - \epsilon_{\nu'} + \omega} V_{\nu\nu'}^{\text{eff.}},$$

$$V_{\lambda\lambda'}^0 = \sum_{\nu} (\lambda\lambda' | F | \nu\nu) (n_{\nu} - n_{s\nu}).$$

Alle Größen hängen dabei natürlich noch vom Isospin ab, es liegen also zwei gekoppelte Gleichungen für das effektive Feld der Protonen und der Neutronen vor.

5.3. Symmetrie des effektiven Feldes.

Bei den uns interessierenden Änderungen der Protonenzahl bzw. Neutronenzahl werden stets gg-Kerne miteinander verglichen. Geben wir etwa zwei Protonen hinzu, so werden sich diese zum Gesamtdrehimpuls Null koppeln und ein sphärisch symmetrisches Feld hervorrufen. Überzeugen wir uns nun direkt davon, daß die abgeleitete Gleichung für das effektive Feld tatsächlich diese Symmetrie liefert.

Im inhomogenen Anteil

$$V_{n_1 j_1 l_1 m_1, n_2 j_2 l_2 m_2}^0 = (n_1 j_1 l_1 m_1, n_2 j_2 l_2 m_2 | F | n_{jlm}, n_{jlm}) (n_{n_{jlm}} - n_{s_{n_{jlm}}})$$

können wir voraussetzen:

$$n_{njlm} = n_{njl-m},$$

und dann die Summanden mit m und $(-m)$ sofort zusammenfassen.

Auf diese Weise fallen in der Quasiteilchenwechselwirkung die spinabhängigen Beiträge

$$(\vec{\sigma}\vec{\sigma}'), (\vec{\sigma}\vec{\sigma}')(\vec{\tau}\vec{\tau}')$$

weg, weil der Erwartungswert des Spinoperators wegen

$$\langle n_{jlm} | \vec{\sigma} | n_{jlm} \rangle + \langle n_{j1-m} | \vec{\sigma} | n_{j1-m} \rangle = \text{Sp}(\vec{\sigma}) = 0$$

verschwindet.

Für die Besetzungszahlen, und dementsprechend für deren Änderung, nehmen wir an: in einer j -Schale werden alle Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt, wenn jene nur teilweise aufgefüllt ist. Über die magnetische Quantenzahl können wir dann sofort summieren, bevor die Winkelintegration im Überlappungsintegral ausgeführt wird. Mit $v_{jlm}(\theta, \phi)$ sei der winkel- und spinabhängige Anteil der Einteilchenwellenfunktionen bezeichnet. Es folgt dann, am einfachsten aus dem Additionstheorem für die Kugelfunktionen, die Beziehung:

$$\sum_m v_{jlm}^+(\theta, \phi) v_{jlm}(\theta, \phi) = \frac{2j+1}{4}.$$

Im Matrixelement von F liefert die Winkelintegration sodann wegen der Orthogonalität der Funktionen $v_{jlm}(\theta, \phi)$ die Auswahlregeln:

$$j_1 = j_2, \quad l_1 = l_2, \quad m_1 = m_2.$$

Der inhomogene Teil der Integralgleichung hat demnach die Form

$$V_{njlm, n'j'l'm'}^0 = V_{nj1, nj1}^0 \delta_{jj'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Die Annahme über die Besetzung der $(2j+1)$ Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einer zum Teil gefüllten Schale garantiert, daß im Kern der Gleichung der Polterm

$$A_{\lambda_1 \lambda_2}(\omega) = \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{\epsilon_{\lambda_1} - \epsilon_{\lambda_2} + \omega}$$

nur dann etwas beiträgt, wenn gilt

$$\epsilon_{\lambda_1} \neq \epsilon_{\lambda_2}.$$

Da der inhomogene Beitrag ohnehin ein statisches Feld darstellt, können wir dann ohne Schwierigkeit zum Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ übergehen.

Der Kern $F \cdot A$ ist drehungsinvariant, weil A von den magnetischen Quantenzahlen nicht abhängt und F als drehinvariant vorausgesetzt wird. Die Rotationssymmetrie des inhomogenen Terms der Integralgleichung kann somit durch den Kern nicht zerstört werden; die Lösung muß wieder die Form

$$V_{n_1 l_1 m_1, n_2 j_2 l_2 m_2}^{\text{eff.}} = V_{n_1 l_1, n_2 j_2 l_2}^{\text{eff.}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$$

besitzen. Formal läßt sich dies am einfachsten bei der iterativen Lösung der Gleichung sehen, denn die Auswahlregeln bleiben bei jedem Schritt erhalten. Im Kern

$$(n_1 j_1 l_1 m_1, n_2 j_2 l_2 m_2 | F | n_1 j_1 l_1 m_1) A_{n_1 l_1, n_2 j_2 l_2}$$

kann die Summation über m, m' wie oben ausgeführt werden und die Orthogonalitätsrelationen für den Winkelanteil der Einteilchenfunktionen liefern wieder die Auswahlregeln:

$$j_1 = j_2, \quad l_1 = l_2, \quad m_1 = m_2.$$

Allgemein können wir für den inhomogenen Term und die Lösung eine Entwicklung nach Kugelfunktionen ansetzen. Ähnlich wie bei der Potentialstreuung werden dann in der Integralgleichung die Partialwellen entkoppelt.

Nunmehr können die magnetischen Quantenzahlen völlig weggelassen werden. Da das Überlappungsintegral

$$\int r^2 dr F(r) \phi_{n_1 l_1}(r) \phi_{n_2 l_2}(r) \phi_{n_3 l_3}(r) \phi_{n_4 l_4}(r)$$

nur von den radialen und den Bahndrehimpulsquantenzahlen abhängt, läßt sich sogar jeweils die Summation über ein Spinbahn Dublett ausführen. Das effektive Feld, welches auf die Quasiteilchen wirkt, hängt demnach nur von deren radialer und Bahndrehimpulsquantenzahl ab.

5.4. Lösung der Gleichungen.

5.4.1. Einteilchenbasis.

Als Basis der Darstellung verwenden wir die Eigenfunktionen des sphärisch symmetrischen, harmonischen Oszillators. Die Oszillatorparameter $\hbar\omega$ bzw. r_0 entnehmen wir den Näherungsformeln¹⁾

$$\hbar\omega = \frac{34.7 \text{ MeV}}{A^{1/3-0.44}}, \quad r_0 = 1.19 \text{ fm } (A^{1/3-0.44})^{1/2} \quad (5.4.1)$$

Die Auswahl dieses Funktionensystems erfolgt vorwiegend aus rein praktischen Gesichtspunkten. Zwar wissen wir aus den Überlegungen in (3.4), wie wir im Prinzip Einteilchenfunktionen gewinnen können, welche die Einteilchen-GREEN-Funktion diagonalisieren. Im Rahmen des Quasiteilchenmodells kann dieses Problem jedoch wiederum nur durch Anpassung an experimentelle Daten gelöst werden, da gar nicht der Versuch gemacht werden soll, die Selbstenergie aus der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu bestimmen.

Die Oszillatorfunktionen sind einfache, analytisch bekannte Funktionen aus einem vollständig diskreten Spektrum. Somit bereitet die Berechnung der Überlappungsintegrale, d.h. der Matrixelemente

$$\int d^3r F(r) \phi_1(r) \phi_2(r) \phi_4(r) \phi_3(r)$$

keinerlei Schwierigkeiten.

Für die konkrete Lösung der Integralgleichung geht es bei der Wahl eines speziellen Funktionensystems im wesentlichen darum, die Matrixelemente der effektiven Quasiteilchenwechselwirkung in geeigneter Weise zu parametrisieren. Eine ungünstige Wahl kann einmal darin sichtbar werden, daß die Parameter Schwankungen von Kern zu Kern durchführen, wenn sie durch Anpassung bestimmt werden, weil sich in der Quasi-

¹⁾ G. EDER, Kernkräfte S. 74, Karlsruhe 1965.

teilchenwechselwirkung noch eine ungenügend erfasste Einteilchenstruktur durchsetzt. Von der Qualität der Einteilchenbasis wird es aber auch abhängen, wieviel Funktionen berücksichtigt werden müssen, um die Integralgleichung näherungsweise durch eine endliche Matrixgleichung ersetzen zu können.

5.4.2. Quasiteilchenenergien.

Die Einteilchenenergien ϵ_λ entnehmen wir dem NILSSON-Modell¹⁾, wobei für den Oszillatorparameter wieder Gleichung (5.4.1.1) gelten soll. Die Parameter C und D im NILSSON-Potential

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 + C \vec{l} \cdot \vec{s} + D \vec{l}^2$$

wählen wir mit $C = -2\hbar \omega \cdot 0.05$, $D = -0.05 \mu(n, l)$, auf weitere Verfeinerungen wollen wir keinen Wert legen, da wir uns einmal auf das sphärisch symmetrische Potential beschränken, es uns zum anderen nur auf die Schalenstruktur und nicht auf die genaue Lage der Einteilchenenergien ankommt.

5.4.3. Besetzungszahlen.

Paarungseffekte sollen nicht berücksichtigt werden. Wir nehmen an, daß wir mit den Einteilchenenergien und Funktionen Quasiteilchen beschreiben, so daß wir für die Besetzungszahlen eine stufenförmige FERMI-Verteilung erhalten:

$$n_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } \epsilon_\lambda < \mu \\ 0 & \text{für } \epsilon_\lambda > \mu \end{cases}.$$

Diese Vorschrift ist der Entartung wegen für das FERMI-Niveau selbst nicht eindeutig. Zusätzlich muß vorausgesetzt werden, alle Zustände zu fester Drehimpulsquantenzahl j seien mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt. Da die Zahl der Quasi-

¹⁾ S.G. NILSSON, Kgl. Dansk. Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd. 29 Nr. 16 (1955).

teilchen exakt mit der der Teilchen übereinstimmen muß¹⁾, gilt:

$$\sum_{\lambda P} n_{\lambda}^P = Z \quad , \quad \sum_{\lambda N} n_{\lambda}^N = N \quad ,$$

woraus sich schließlich n_{λ} eindeutig bestimmen läßt.

5.4.4. Entkopplung.

Wegen des Faktors

$$A_{\lambda\lambda'} = \frac{n_{\lambda} - n_{\lambda'}}{\epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda'}} ,$$

kommen im homogenen Teil der Integralgleichung nur Matrixelemente des effektiven Feldes $V_{\lambda\lambda'}$ vor, wenn die Quantenzahlen (λ, λ') gerade einem Teilchen-Loch-Paar entsprechen. Dadurch wird die Gleichung für Teilchen-Loch-Matrixelemente bzw. Loch-Loch-Matrixelemente entkoppelt. Wir lösen zunächst die Gleichung für die Teilchen-Loch Indizes:

$$V_{\lambda\lambda'}^{TL} = V_{\lambda\lambda'}^O + \sum_{\nu\nu'} (\lambda \lambda' | F | \nu\nu') A_{\nu\nu'} V_{\nu\nu'}^{TL} .$$

Für die restlichen Matrixelemente erhalten wir eine Bestimmungsgleichung

$$V_{\lambda\lambda'}^{TT/LL} = V_{\lambda\lambda'}^O + \sum_{\nu\nu'} (\lambda\lambda' | F | \nu\nu') A_{\nu\nu'} V_{\nu\nu'}^{TL} .$$

5.4.5. Beschränkung auf einen endlichdimensionalen Teilraum.

Um die Gleichung praktisch lösen zu können, müssen wir uns auf einen endlichdimensionalen Teilraum von Basisfunktionen bzw. Teilchen-Loch-Paaren beschränken. In der Ortsdarstellung bedeutet das, den Kern der Integralgleichung durch einen ausgearteten Kern zu approximieren. Wir wollen alle Einteilchenniveaus berücksichtigen, für deren Energie ϵ_{λ} gilt:

$$\epsilon_{\lambda} \leq 9 \hbar \omega .$$

¹⁾ A.B. MIGDAL, a.a.O., S.227 .

Damit liegt die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems bei den ausgewählten Kernen zwischen 25 und 30.

Um die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Dimension des Teilraums zu überprüfen, setzen wir die Schranke für die maximale Einteilchenenergie schrittweise herab. Zwei typische Beispiele sollen dies in Abb.2 demonstrieren. Das Ergebnis der Untersuchung ist sehr unbefriedigend, denn von einer Konvergenz ist wenig zu sehen.

Wenn wir uns daran erinnern, daß die Renormierung der BETHE-SALPETER-Gleichung, d.h. die Isolierung des Polterms A, gerade damit motiviert wird, die Integration über die Impulse auf die Umgebung der FERMI-Oberfläche einzuschränken, dann erscheint die mangelnde Konvergenz der Lösungen als ein schwerwiegender Einwand.

Die Beschränkung auf einen endlichen Teilraum läßt sich auch als eine zusätzliche Renormierung formulieren¹⁾. Wir spalten vom Polterm A einen Anteil $\tilde{A}$ ab, der nur die zugelassenen Teilchen-Loch-Paare enthält:

$$A = \tilde{A} + (A - \tilde{A}) .$$

Die ursprüngliche Gleichung

$$\Gamma = F + F A \Gamma$$

ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$\Gamma = \tilde{F} + \tilde{F} \tilde{A} \Gamma$$

wenn F Lösung der Integralgleichung

$$\tilde{F} = \tilde{F} + \tilde{F} (A - \tilde{A}) F$$

ist. An Stelle der Quasiteilchenwechselwirkung F hätten wir an sich die renormierte Größe $\tilde{F}$ zu benutzen. Solange wir aber für die Quasiteilchenwechselwirkung F ohnehin nur einen Ansatz machen, hat es wenig Sinn, diese Größe aus der Integralgleichung zu bestimmen. Um zu besseren Resultaten zu kommen, bedarf es vermutlich eines neuen, für das endliche System wohlbegründeten Ansatzes für F oder $\tilde{F}$.

¹⁾ A.B. MIGDAL, Nuclear Theory: The Quasiparticle Method, S. 50, N.Y. 1968.

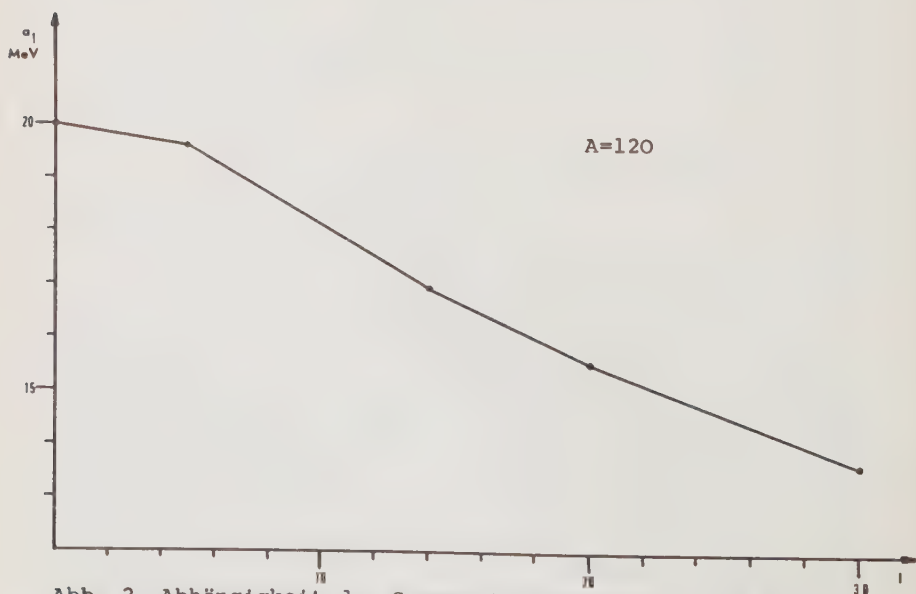
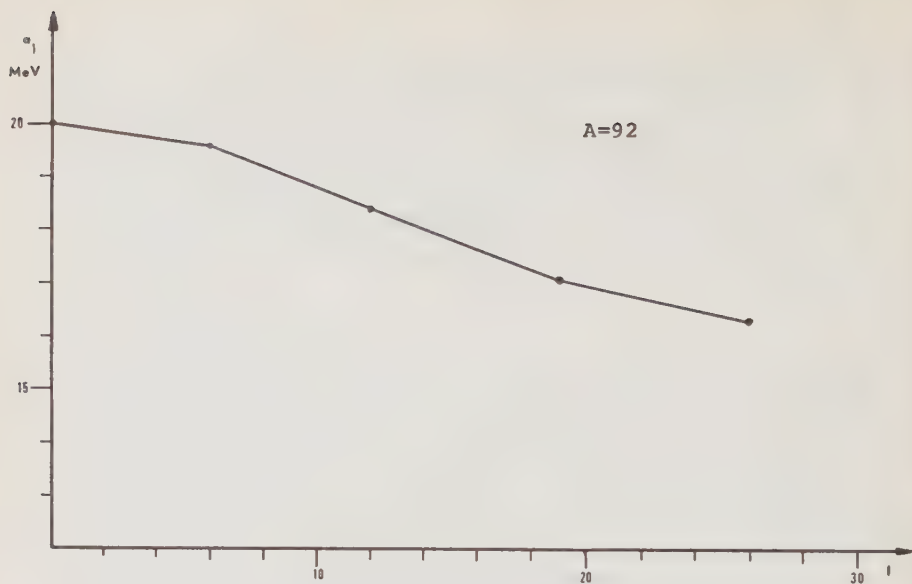


Abb. 2. Abhängigkeit des Symmetrieparameters a_1 von der Anzahl I der berücksichtigten Teilchen-Loch-Paare.

5.4.6. Parameter der Wechselwirkung.

Für die Radialabhängigkeit der Quasiteilchenwechselwirkung $F(r)$ soll die von MIGDAL angegebene Interpolationsformel dienen (vgl. 3.9)

$$F(r) = F_a + F_b \frac{1}{1 + \exp((r-R_0)/a)} .$$

Dies entspricht einer SAXON-WOODS Dichteverteilung und wir benutzen auch für R_0 und a gängige Werte:

$$R_0 = (1.19 \text{ fm } A^{1/3} - 0.52 \text{ fm}) ,$$

$$a = 0.55 \text{ fm} .$$

An sich sind R_0 und a freie Parameter, die experimentellen Daten angepaßt werden können; es ist jedoch plausibel, sich auf diese Weise festzulegen, um nicht zuviel freie Parameter anpassen zu müssen. Die verbleibenden zwei Parameter sind noch isospinabhängig:

$$F_{a/b} = F_{a/b} + F'_{a/b} (\vec{\tau} \vec{\tau}') .$$

Um einen Vergleich mit Literaturwerten nicht zu erschweren, schließen wir uns der Konvention an, die Größen $F_{a/b}$ dimensionslos zu machen, indem ein Faktor

$$\left(\frac{dn}{d\epsilon_F} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{4} \frac{n}{\epsilon_F} \right)^{-1}$$

mit $\epsilon_F = 40 \text{ MeV}$ abgespalten wird:

$$F_{a/b} = \left(\frac{dn}{d\epsilon_F} \right)^{-1} f_{a/b} .$$

Damit behalten wir in der Quasiteilchenwechselwirkung noch vier freie Parameter (f_a, f'_a, f_b, f'_b) .

5.4.7. Numerische Behandlung.

Die Überlappintegrale

$$\int r^2 dr F(r) \phi_1(r) \phi_2(r) \phi_3(r) \phi_4(r)$$

der radialen Wellenfunktionen, die in den Matrixelementen

$$(\lambda_1 \lambda_2 | F | \lambda_3 \lambda_4)$$

auftreten, werden durch numerische Quadratur berechnet. Für Oszillatorfunktionen erweist sich dabei die Methode der HERMITE-Integration als besonders vorteilhaft.

Die Integralgleichung bzw. unendlichdimensionale Matrixgleichung wird in der beschriebenen Weise in der Form eines linearen Gleichungssystems unter Verwendung des Verfahrens von GAUSS-BANACHIEWICZ gelöst. Experimente mit verfeinerten Verfahren, wie verbesserte Auswahl der Pivotelemente und doppelt genaue Arithmetik, zeigen, daß die Gleichungssysteme gut konditioniert sind und das einfache Verfahren ausreichende Genauigkeit liefert.

Die Rechnungen werden mit Hilfe der Rechner TR4 der Zentralen Rechenanlage Marburg und CD 3300 des Rechenzentrums der Universität Gießen durchgeführt; als Programmiersprache dient FORTRAN.

5.5. LANDAU-Beitrag.

Befassen wir uns zunächst mit dem Beitrag des inhomogenen Teils der Integralgleichung

$$V_{\lambda\lambda}^0 = \sum (\lambda\lambda | F | \nu\nu) (n_\nu - n_{s\nu}),$$

den wir als LANDAU-Beitrag bezeichnen wollen, weil abgesehen von der Basis die Gleichung

$$\delta\mu = V^0$$

gerade der LANDAU-Theorie entspricht.

Für die Protonen bedeutet dies

$$V_{\lambda_P \lambda_P}^{\text{O Prot.}} = \sum (\lambda_P \lambda_P | F^{PP} | \lambda_P \lambda_P) \delta n_{\nu P} \\ + \sum (\lambda_P \lambda_P | F^{PN} | \nu_N \nu_N) \delta n_{\nu N} ,$$

für die Neutronen entsprechend

$$V_{\lambda_N \lambda_N}^{\text{O Neutr.}} = \sum (\lambda_N \lambda_N | F^{PP} | \nu_P \nu_P) \delta n_{\nu N} \\ + \sum (\lambda_N \lambda_N | F^{PN} | \nu_P \nu_P) \delta n_{\nu P} .$$

Dabei charakterisieren λ_P und λ_N die Quasiteilchenniveaus der Protonen bzw. Neutronen.

Betrachten wir zunächst bei den Neutronen die magische Zahl 50 und speziell solche Kerne mit $40 \leq Z$ und $N \leq 58$. Mit der Abkürzung

$$f = (1g1g | F | 1g1g) = (n_1=1, l_1=4, n_2=1, l_2=4 | F | n_3=1, l_3=4, n_4=1, l_4=1)$$

erhalten wir folgenden LANDAU-Beitrag

$$V_{\text{O Prot.}}^{\text{O}} = (f^{PP} - f^{PN}) \frac{t}{2} = - V_{\text{O Neutr.}}^{\text{O}} \\ \delta \mu = (f^{PP} - f^{PN}) t ,$$

der mit (5.1.1) übereinstimmt. Das Ergebnis ist deswegen so einfach, weil nur eine einzige radiale Wellenfunktion beteiligt ist.

Die Situation wird unübersichtlicher, wenn die Änderung der Neutronen- und Protonenbesetzungszahlen vom symmetrischen zum unsymmetrischen Kern bei Quasiteilchenzuständen mit verschiedenen Drehimpuls- und Radialquantenzahlen stattfinden. In der Summe treten dann dementsprechend verschiedene Überlappungsintegrale auf. Im Massenzahlbereich $110 \leq A \leq 120$ kommt es dadurch zu beträchtlichen Schwankungen im LANDAU-Beitrag; so bemerken wir einen Sprung von 23.7 MeV bei $A=110$ auf 27.16 MeV, bei $A=114$, wenn wir die Parameter in Übereinstimmung mit MIGDAL wählen.

Man könnte zunächst versucht sein, solche Schwankungen bereits als Schaleneffekte der gesuchten Art zu deuten. Dies trifft jedoch sicher nicht zu, denn es handelt sich dabei um einen Effekt, der ausschließlich von den radialen Wellenfunktionen herrührt. Die magischen Zahlen charakterisieren nun aber keineswegs den Übergang zwischen verschiedenen Radialfunktionen, was am Beispiel des $1g_{9/2}-1g_{7/2}$ Dubletts am deutlichsten zu sehen ist. Weiterhin ist das Überlappungsintegral empfindlich gegenüber Änderungen in den Funktionen $\phi_{\lambda}(r)$. Demnach ist der LANDAU-Beitrag bei festgehaltenen Parametern der Wechselwirkung stark von der Basis abhängig. Eine andere Situation läge dann vor, wenn wir an dieser Stelle nicht die energieunabhängigen Oszillatorfunktionen, sondern die richtigen Quasiteilchenwellenfunktionen benutzen würden, die sich im Prinzip aus der DYSON-Gleichung bestimmen lassen.

Die Schwankungen, die in V^0 in Folge der Unstetigkeit der Matrixelemente auftreten können, übertragen sich auch auf das effektive Feld. Weil wir ihnen keine physikalische Bedeutung zumessen können, wollen wir sie ausschalten und damit von den Effekten der möglichen Teilchen-Loch-Anregungen trennen. In der Umgebung von $A=90$ tragen zu V^0 nur die Zustände des $1g_{9/2}-1g_{7/2}$ Dubletts bei. Die radialen Wellenfunktionen stimmen dann in allen Matrixelementen überein und es treten keine Schwankungen in V^0 auf. Dagegen kommen bei der Isobarenguppen in der Nähe von $A=116$ Überlappungsintegrale zwischen $1g$, $2d$, und $3s$ Funktionen vor, die zu den diskutierten Unstetigkeiten in V^0 führen. In diesen Fällen bringen wir durch eine geeignete Wahl bei den Parametern der Wechselwirkung die Unregelmäßigkeiten, die von den Überlappungsintegralen herrühren, zum Verschwinden. Da es uns nicht darauf ankommt, den absoluten Wert der Symmetrieenergie genau zu reproduzieren, können wir in allen Fällen so verfahren, daß wir den LANDAU-Beitrag V^0 auf einen festen Wert (20 MeV) normieren. Bei den Isobarenguppen um $A=116$ kommt es dann zu Schwankungen im Parameter $F_{a/b}$ der Quasiteilchenwechselwirkung, während in der Umgebung von $A=90$ $F'_{a/b}$ konstant

gewählt werden kann.

5.6. Einfluß der Teilchen-Loch-Paare.

Untersuchen wir nun den Beitrag des zweiten, homogenen Teils der Integralgleichung. Zunächst wollen wir annehmen, die letzten Protonen und Neutronen besetzten beide die gleiche j-Schale. Bei Neutronen wie Protonen treten dann die gleichen Teilchen-Loch-Paare auf. Für das effektive Feld der Teilchen-Loch-Paare gilt wie für den LANDAU-Beitrag in diesem Fall

$$\begin{array}{cc} \text{prot.} & \text{Neutr.} \\ V_{\text{eff.}} & = - V_{\text{eff.}} \end{array}$$

Sei nun v_{ik} das effektive Feld eines bestimmten Teilchen-Loch-Paares (ik) und sei $\Delta\epsilon_{ik}$ der zugehörige Energienenner im Polterm A der Integralgleichung. Der Einfluß dieses Paares auf die Verschiebung des Quasiteilchenniveaus ergibt sich damit bei den Protonen als

$$V_1^{\text{Prot.}} = - \frac{2}{\Delta\epsilon_{ik}} (\lambda\lambda \mid F^{\text{PP}}_{n_{P_1}} - F^{\text{PN}}_{n_{N_1}} \mid ik) v_{ik},$$

und bei den Neutronen zu

$$V_1^{\text{Neutr.}} = - \frac{2}{\Delta\epsilon_{ik}} (\lambda\lambda \mid F^{\text{PP}}_{n_{N_1}} - F^{\text{PN}}_{n_{P_1}} \mid ik) v_{ik}$$

(λ : Quasiteilchenzustand).

Zur Differenz der chemischen Potentiale trägt das Teilchen-Loch-Paar (ik) insgesamt mit

$$\delta\mu_1 = - \frac{2}{\Delta\epsilon_{ik}} (\lambda\lambda \mid \left[F^{\text{PP}} - F^{\text{PN}} \right] \{ n_1^{\text{N}} + n_1^{\text{P}} \} \mid ik) v_{ik}$$

bei; da v_{ik} t, ist auch $\delta\mu_1$ t, d.h. ein Beitrag zur Symmetrieenergie.

Das Vorzeichen von $\delta\mu_1$ hängt noch vom Wert des Matrixelements ab, die numerische Berechnung zeigt, daß sich das Teilchen-Loch-Paar in umgekehrter Richtung zum LANDAU-Beitrag auswirkt. Damit verkleinert sich unter Berücksichtigung der Teilchen-Loch-Paare auch die Symmetrieenergie.

Die Symmetrieenergie kommt, abgesehen vom Beitrag der kinetischen Energie, dadurch zustande, daß die gesamte potentielle Energie des Kerns, welche von der effektive Wechselwirkung der Protonen und Neutronen jeweils untereinander herrührt, größer ist als die von derjenigen zwischen Neutronen und Protonen. Dieser Unterschied ist also bei Berücksichtigung des zweiten Teils der Integralgleichung für die Änderung der Selbstenergie geringer als bei dessen Vernachlässigung.

In dem diskutierten einfachen Fall, bei dem die Quasiteilchenzustände für Protonen und Neutronen noch zur gleichen Schale gehören, sehen wir, daß die Effekte bei Protonen und Neutronen in die gleiche Richtung gehen und sich gegenseitig verstärken. Im allgemeinen Fall läßt sich der Einfluß des zur Diskussion stehenden Teils der Gleichungen nicht so einfach übersehen. Bei Protonen und Neutronen treten dann verschiedene Teilchen-Loch-Paare auf, die sowohl zu verschiedenen Energien wie zu den verschiedenen Zuständen gehören.

Das wesentliche Ergebnis, welches wir nach Lösung der Integralgleichung erhalten, besteht darin, daß der diskutierte, reduzierende Einfluß der Teilchen-Loch-Paare am größten ist, wenn Protonen und Neutronen gleiche Schalen, kleiner dagegen, wenn sie verschiedene Schalen besetzen.

5.7. Diskussion der numerischen Ergebnisse.

Das Verhalten des Symmetrieparameters in der Umgebung von $A=90$ zeigt Abb. 3. Die zugehörigen Parameterwerte finden sich in Tabelle 1. Die entsprechenden Ergebnisse für den Massenzahlbereich, bei dem die Protonen die magische Zahl $Z=50$ überschreiten, sind in Abb. 4 und Tabelle 2 zusammengestellt.

In Abb. 3 erniedrigt der Einfluß der Teilchen-Loch-Paare die Symmetrieenergie um etwa 5.5 MeV für den Fall gleicher Schalen, besetzen die Neutronen die nachfolgende Schale mit $N > 50$, dann wird die Symmetrieenergie nur um etwa 3.8 MeV reduziert. Unter Berücksichtigung der kleineren Schwankungen

können wir daraus einen Sprung des Symmetrieparameters zwischen 1.2 MeV und 1.9 MeV ablesen.

Im zweiten Massenzahlbereich schwankt der Einfluß der Teilchen-Loch-Paare stärker, es ergibt sich ein Sprung zwischen 2.5 MeV und 0.95 MeV. Vergleichen wir diese Resultate mit dem Verhalten der Symmetrieenergie, wie es aus den Bindungsenergien gewonnen wird (Abb.1), so sehen wir, daß die Unstetigkeiten an den magischen Atomkernen größenordnungsmäßig richtig reproduziert werden. Speziell der Sprung bei $A=90$ ist allerdings bei den experimentellen Werten fast doppelt so groß.

Die Resultate scheinen sich auch durch weiteres Variieren der Parameter nicht verbessern zu lassen. Zwar ist es möglich, etwa beim Übergang von $A=90$ auf $A=92$ einen größeren Sprung zu berechnen, jedoch werden dann die Schwankungen bei den benachbarten Massenzahlen stärker, so daß der Effekt insgesamt weniger signifikant auftritt.

Wie bereits diskutiert, zeigt die Abhängigkeit der Lösungen der Integralgleichung von der Anzahl der Teilchen-Loch-Paare keine Konvergenz. Bei Rechnungen mit effektiven scheint diese Schwierigkeit jedoch häufig aufzutreten. Es ist also immer notwendig, sich bei der Summation über die Einteilchenzustände auf einen festen, endlichen Teilraum zu beschränken und die effektive Wechselwirkung dementsprechend geeignet zu renormieren.

Auf der anderen Seite ändert sich der Symmetrieparameter a_1 stetig, wenn Teilchen-Loch-Paare fern von der FERMI-Kante hinzu genommen werden, die typische Einteilchenstruktur rührt also von den Teilchen-Loch-Paaren in der Nähe des FERMI-Niveaus her. Insbesondere hat das Abschneideverfahren keinen Einfluß auf die Schaleneffekte. Die benutzten Parameterwerte stehen zum Teil in Widerspruch zu den von MIGDAL angegebenen Werten. Einen Überblick über einige in der Literatur angegebene Parametersätze im Vergleich zu den in dieser Arbeit angenommenen Werten zeigt Abbildung 5.

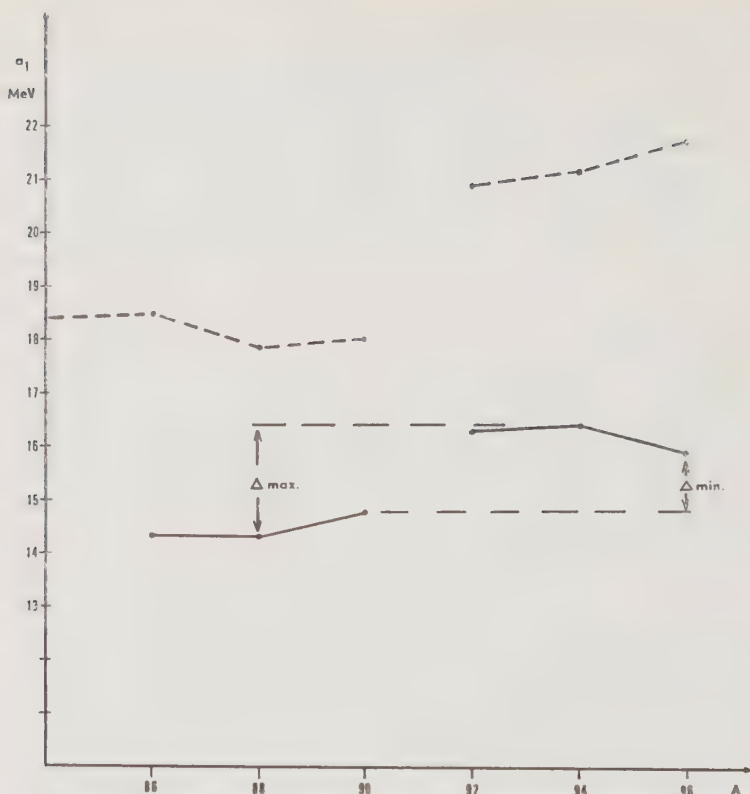


Abb.3. Symmetrieparameter $a_1(A)$ im Massenzahlbereich $A \approx 90$ ($N \approx 50$). Die oberen gestrichelten Kurven geben das experimentelle Verhalten wieder, die unteren ausgezogenen Kurven zeigen den berechneten Beitrag der potentiellen Energie zu a_1 .

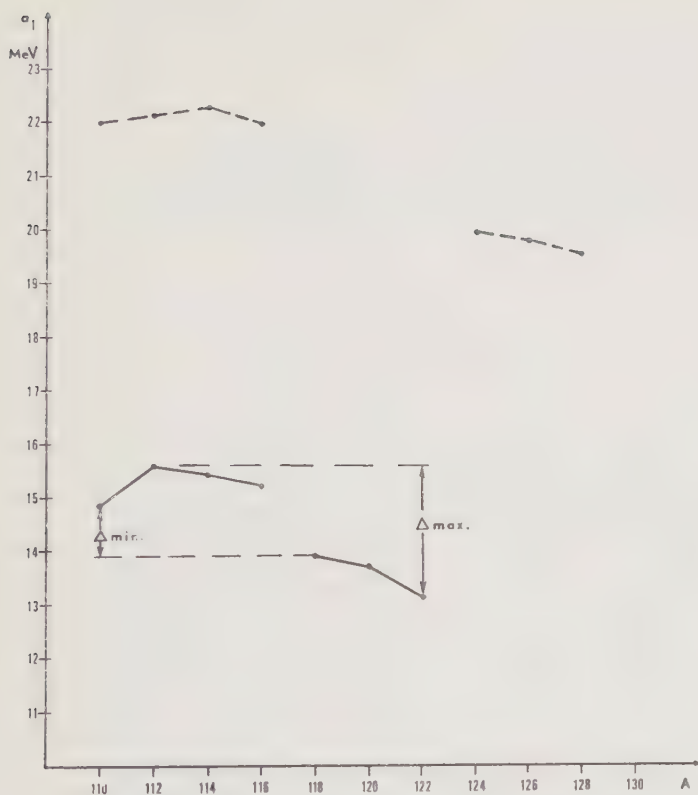


Abb. 4. Symmetrieparameter $a_1(A)$ im Massenzahlbereich $A \approx 116$ ($Z \approx 50$). Die oberen gestrichelten Kurven geben das experimentelle Verhalten, die unteren ausgezogenen die berechneten Werte von a_1 (ohne den Anteil der kinetischen Energie) wieder.

A	f_a	f_b	f_a'	f_b'
86-96	-2.8	3.8	1.2	-0.3

Tabelle 1. Parameter der effektiven Wechselwirkung im Massenzahlbereich $A \approx 90$.

A	f_a	f_b	f_a'	f_b'
110	-2.8	3.8	1.25	-0.3
112	-2.8	3.8	1.25	-0.3
114	-2.8	3.8	1.01	-0.16
116	-2.8	3.8	1.00	-0.15
118	-2.8	3.8	1.02	-0.17
120	-2.8	3.8	1.02	-0.12
122	-2.8	3.8	1.02	-0.12

Tabelle 2. Parameter der effektiven Wechselwirkung im Massenzahlbereich $A \approx 116$

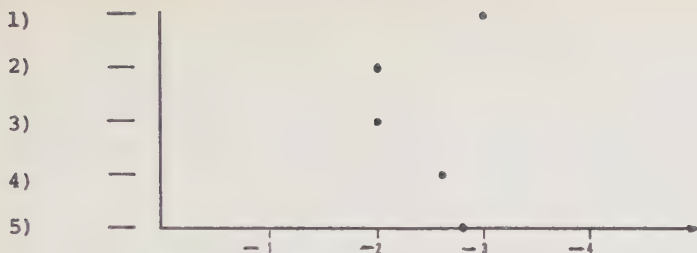


Abb.5.1. Vergleich verschiedener Werte für f_a .

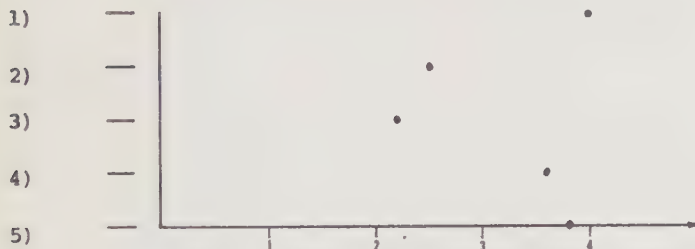


Abb.5.2. Vergleich verschiedener Werte für f_b .

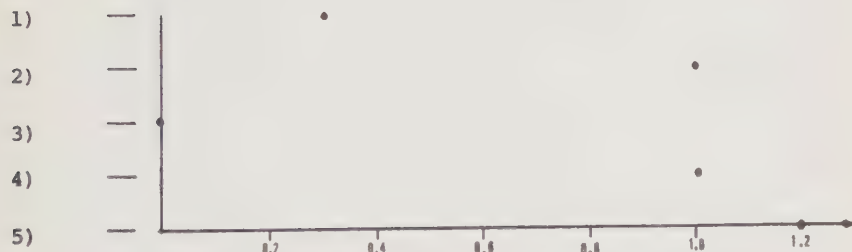


Abb.5.3. Vergleich verschiedener Werte für f_a' .

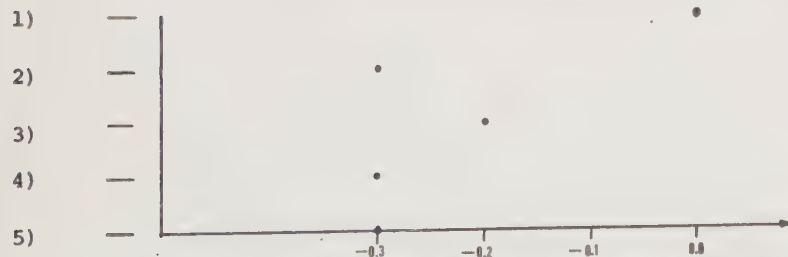


Abb.5.4. Vergleich verschiedener Werte für f_b' .

- 1) A.B.MIGDAL, Theory of Finite Fermi Systems ..., N.Y. 1967.
- 2) A.B.MIGDAL, Nuclear Theory: The Quasiparticle Method, N.Y. 1968.
- 3) V.M.OSADCHIEV, M.A.TROITSKII, J.Nucl.Phys. (U.S.S.R.) 5, 1001, 1967.
- 4) J.SPETH, Nuclear Physics, A 135, 445, 1969.
- 5) eigene Werte.

6. ZUSAMMENFASSUNG.

In dieser Untersuchung haben wir den Versuch unternommen, typische Schaleneffekte im isospinabhängigen Anteil der Bindungsenergie der Atomkerne im Rahmen des Quasiteilchenmodells zu beschreiben. Die Änderung der Bindungsenergie innerhalb einer Isobarengruppe verknüpften wir mit einer entsprechenden Verschiebung der Proton- und Neutronquasiteilchenpole, hervorgerufen durch ein Feld, das die Änderung im effektiven Einteilchenpotential der Nukleonen beschreibt.

Diese Methode liefert einmal eine Symmetrieenergie, wie sie sich bereits aus den Gleichungen der LANDAU-Theorie ergibt. Schaleneffekte treten in diesem Beitrag nicht auf, weil die Einteilchenenergien dabei keine Rolle spielen. Charakteristisch für das endliche System ist die Möglichkeit, daß die Änderung der Protonen- bzw. Neutronendichte zur Anregung von virtuellen Teilchen-Loch-Paaren führt. Dadurch wird die Symmetrieenergie erniedrigt. Der Einfluß der Teilchen-Loch-Paare ist stark von den Quasiteilchenenergien abhängig. Die Schalenstruktur wirkt sich in einer Reduzierung des Symmetrieparameters in der Weise aus, daß der Effekt größer ist, wenn die letzten Neutronen und Protonen diesselbe Schale besetzen, kleiner dagegen, wenn sie verschiedene Schalen auffüllen. Mit geeignet gewählten Parametern der Quasiteilchenwechselwirkung konnten so die Sprünge des Symmetrieparameters in den Massenzahlbereichen $A \approx 90$ und $A \approx 116$ reproduziert werden.

Diese Untersuchung ist von Herrn Professor
Dr. G. EDER vorgeschlagen worden. Für die
Anregung und beständige Förderung der Arbeit
möchte ich ihm herzlich danken.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft
danke ich für finanzielle Unterstützung.

Lebenslauf

Am 20. September des Jahres 1942 wurde ich in Schwarzenbach an der Saale geboren. Nachdem ich in Bensheim an der Bergstraße die Grundschule absolviert hatte, besuchte ich daselbst von 1952 bis 1958 das Alte Kurfürstliche Gymnasium. Von 1958 bis 1961 besuchte ich die Tielemannschule in Limburg an der Lahn, wo ich im Februar 1961 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester 1961 nahm ich das Studium der Physik an der Justus-Liebig-Universität auf. Im April 1963 bestand ich die Diplomvorprüfung. Im Wintersemester 1963 und im Sommersemester 1964 setzte ich mein Studium an der Technischen Universität Berlin fort. Zum Wintersemester 1964/65 kehrte ich wieder zur Justus-Liebig-Universität zurück. Unter der Anleitung von Herrn Professor G. EDER fertigte ich eine Diplomarbeit über die "Bindungsenergien von Atomkernen im Modell unabhängiger Nukleonen" an und legte im Dezember 1967 die Diplomhauptprüfung ab. Seitdem bin ich am Institut für Theoretische Physik I tätig. Die vorliegende Dissertation habe ich in dieser Zeit unter der Betreuung von Herrn Professor Dr. G. EDER angefertigt.

Foto - Druck
Chemoprint^{OHG}
Gießen